

## RESULTADOS NUMERICOS EN EL PROBLEMA DE TRES CUERPOS

F. López-García

Observatorio Astronómico "Félix Aguilar"  
Universidad Nacional de San Juan, Argentina

### RESUMEN

Se estudia numéricamente la evolución final de un sistema de tres cuerpos con masas finitas. Se consideran los casos elíptico-hiperbólico y elíptico-parabólico y la formación de un sistema binario. La integración numérica se efectuó aplicando el método de prolongaciones analíticas. Se considera el caso de posibles colisiones binarias. También se estudió la variación de los elementos elípticos después de la formación de una binaria.

### ABSTRACT

Final evolution of a three-body system with finite masses is studied numerically. Elliptic-hyperbolic and elliptic-parabolic cases are considered. The formation of a binary system is also considered. The numerical integration is made using analytic prolongation methods. Possible binary collisions are considered. The variation of elliptic elements after the formation of a binary is also studied.

*Key words:* GRAVITATION – STARS-STELLAR DYNAMICS

### I. INTRODUCCION

El problema de los tres cuerpos consiste en determinar el comportamiento dinámico del sistema que se mueve en un campo gravitatorio o con una ley arbitraria de atracción. Las dificultades matemáticas que presenta la solución de este problema fueron ya reconocidas por Newton en 1687, siendo desde entonces uno de los problemas más interesantes en Astronomía y Matemáticas.

Existe una extensa literatura sobre el tratamiento de este problema; Marchal (1976) da una bibliografía muy completa y se han encontrado soluciones de tipo cerrado para casos particulares, solución colineal (de Euler), solución equilátera (de Lagrange), así como también soluciones periódicas, quasi periódicas, soluciones al problema restringido, etcétera.

### II. CONSIDERACIONES GENERALES

El objeto de este trabajo es presentar algunos resultados obtenidos numéricamente del problema general de los tres cuerpos. Las clases de movimientos estudiados son del tipo elíptico-parabólico y elíptico-hiperbólico según la clasificación de Chazy (1918, 1922, 1929, 1932), ya que éstas son las de mayor interés en Astronomía. Se eligen las unidades de masa, tiempo y distancia tales que la constante gravitacional sea igual a una unidad ( $k = 1$ ).

Las ecuaciones diferenciales del movimiento están

escritas en coordenadas de Jacobi. El movimiento de los tres cuerpos se realiza en un plano, debido a la influencia de su mutua gravitación. Los cuerpos considerados son puntos masa y las fuerzas de atracción son fuerzas newtonianas. Las masas de los cuerpos participantes son del mismo orden de magnitud y sus distancias en el instante inicial son también del mismo orden. La evolución dinámica del sistema de tres cuerpos ha sido estudiada mediante integración numérica, aplicando distintos métodos para comprobar la validez de los resultados obtenidos. Los procesos de cálculo que se utilizaron son:

- i) Método de prolongaciones analíticas.
- ii) Método de Runge-Kutta de cuarto orden.
- iii) Conservación de la invariancia de las integrales del movimiento, como confirmación de los resultados numéricos obtenidos.

Se incluyó también la posibilidad de una gran aproximación entre dos de los tres cuerpos, en cuyo caso se regularizaron las ecuaciones diferenciales del movimiento, aplicando la transformación del problema de las colisiones binarias. En general los casos estudiados no presentaron colisiones.

Suponiendo que  $m_1$  y  $m_2$  son los cuerpos que forman el sistema binario, los cuatro elementos orbitales elípticos (en el plano) del punto masa  $m_2$ , es decir,  $a_2$ ,  $e_2$ ,  $w_2$  y  $T_2$ , para  $t > t_0$ , son calculados respecto a  $m_1$ , y los cuatro elementos orbitales del cuerpo restante, en este caso  $m_3$ , o sea,  $a_3$ ,  $e_3$ ,  $w_3$  y  $T_3$ , para  $t > t_0$ , son calculados respecto a la atracción del sistema binario  $m_1 m_2$ , es decir, considerando el movimiento de  $m_3$

respecto al centro de masa de  $m_1$  y  $m_2$ . Estos elementos son calculados con las fórmulas estándar del problema de los dos cuerpos, para los casos elíptico, parabólico e hiperbólico.

Para determinar el tipo de movimiento que realizan los tres cuerpos, para valores de  $t$  muy grandes, se estudió el comportamiento del semi-eje mayor  $a$  y de la excentricidad  $e$ , tanto para el caso elíptico (sistema binario), como para el cuerpo que se aleja respecto del baricentro del sistema binario. También se ha comprobado el tipo de movimiento considerando las energías de las masas interiores (sistema binario) y la energía del cuerpo que se aleja (energía de escape). De este modo se ha podido verificar el tipo de movimiento que se tiene para las condiciones iniciales dadas, para todo  $t$  mayor que cierto  $t_1$  prefijado.

### III. CONDICIONES INICIALES

Las unidades elegidas son tales que la constante gravitacional de Gauss es igual a uno,  $k = 1$ , entonces la unidad de tiempo, año sidéreo, es igual a  $2\pi$ . Se ha supuesto que las tres masas interactuantes son iguales:  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ . En la configuración inicial  $m_1$  está equidistante de  $m_2$  y  $m_3$  y su posición está referida al centro de masa de estos dos cuerpos. La posición de  $m_3$  está dada respecto de  $m_2$ . Las velocidades de los tres cuerpos están dadas con respecto al centro de masa de  $m_2$  y  $m_3$ . La velocidad de  $m_1$  es paralela al radio vector que une  $m_2$  y  $m_3$  y las velocidades de estos dos cuerpos son perpendiculares a dicho radio vector. Sean  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  las velocidades de  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  relativas al centro de masa de  $m_2$  y  $m_3$  y sea  $\mathbf{r}$  el radio vector que las une, entonces de acuerdo a lo expresado anteriormente:

$$\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{r}, \text{ y } \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \perp \mathbf{r} .$$

Sean  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\dot{\xi}$  y  $\dot{\eta}$  las coordenadas y componentes de la velocidad de  $m_1$  y  $x$ ,  $y$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ , las coordenadas y componentes de la velocidad de  $m_3$ . De acuerdo al sistema de coordenadas adoptado (sistema de Jacobi), la posición y velocidad de  $m_1$  y  $m_3$  son, para  $t = 0$ , las presentadas en la Tabla 1.

En los ejemplos VII y VIII presentados en la Tabla 1 los tres cuerpos están alineados inicialmente. Los siete primeros ejemplos fueron propuestos por Becker (1920) y el último es debido a Zumkley (1941).

### IV. ECUACIONES UTILIZADAS

Respecto de un sistema de coordenadas cuyo origen es el centro de masa de los tres cuerpos, sean  $\mathbf{r}_i(x_i, y_i)$  y  $\dot{\mathbf{r}}_i(\dot{x}_i, \dot{y}_i)$  los vectores posición y velocidad del punto de masa  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Por lo tanto, los vectores  $\mathbf{r}_i$  y  $\dot{\mathbf{r}}_i$  satisfacen las condiciones:

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i = 0 ; \quad \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i = 0 .$$

Haciendo,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$  y  $\rho = (M/\mu)\mathbf{r}_1$ , se obtienen los vectores en coordenadas de Jacobi, donde,  $M = m_1 + m_2 + m_3$  y  $\mu = m_2 + m_3$ , siendo  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$  y  $\rho = \rho(\xi, \eta)$ .

Las ecuaciones diferenciales del movimiento de los tres cuerpos en coordenadas de Jacobi son:

$$\ddot{\mathbf{r}} = k \frac{\mu}{\mathbf{r}} \mathbf{r} + k m_1 \left[ \frac{\rho - m_2 \mu^{-1} \mathbf{r}}{\mathbf{r}_{13}^3} - \frac{\rho + m_3 \mu^{-1} \mathbf{r}}{\mathbf{r}_{12}^3} \right] ,$$

TABLA 1

#### EJEMPLOS ESTUDIADOS

Caso	$m_1$				$m_3$				Sistema binario para $t > 0$
	$\xi_0$	$\eta_0$	$\dot{\xi}_0$	$\dot{\eta}_0$	$x_0$	$y_0$	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	
I	3	0	0	-0.5	0	1.5	2.2	0	$m_1, m_3$
II	3	0	0	-1.5	0	0.3	4.0	0	$m_1, m_3$
III	3	0	0	-1.0	0	1.5	2.0	0	$m_1, m_2$
IV	3	0	0	0.9	0	1.5	1.9	0	$m_1, m_2$
V	3	0	0	1.0	0	1.5	2.0	0	$m_1, m_2$
VI	3	0	0	0.3	0	1.5	2.3	0	$m_1, m_3$
VII	0	0	0	2.0	0	0.3	7.0	0	$m_1, m_3$
VIII	2	0	0	1.75	-1	0	0	-1.5	$m_2, m_3$

$$\ddot{\rho} = -k \frac{M m_2 \mu^{-1}}{r_{12}^3} (\rho + m_3 \mu^{-1} r) - k \frac{M m_3 \mu^{-1}}{r_{13}^3} (\rho - m_2 \mu^{-1} r),$$

donde las distancias  $r_{12}$  y  $r_{13}$  se calculan teniendo en cuenta las expresiones vectoriales:

$$r_1 - r_2 = \rho + m_3 \mu^{-1} r; r_1 - r_3 = \rho - m_2 \mu^{-1} r.$$

Sea,  $a_1 = m_2 m_3 \mu^{-1}$  y  $a_2 = m_1 \mu M^{-1}$  dos cantidades escalares; entonces las integrales del movimiento toman la forma: para la integral de la energía

$$E = \frac{1}{2} a_1 \dot{r}^2 + \frac{1}{2} a_2 \dot{\rho}^2 - k \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r} \right),$$

donde

$$\dot{r}_2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \quad \dot{\rho}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2$$

y para la integral del momento angular

$$C = a_1 (r \times \dot{r}) + a_2 (\rho \times \dot{\rho}).$$

El momento de inercia del sistema de tres cuerpos está dado por

$$I = a_1 r^2 + a_2 \rho^2, \text{ donde } r^2 = x^2 + y^2, \rho^2 = \xi^2 + \eta^2$$

Si suponemos que los cuerpos  $m_2$  y  $m_3$  forman un sistema binario, la energía del mismo se expresa como:

$$E(B) = \frac{1}{2} \frac{m_2 m_3}{(m_2 + m_3)} \dot{r}^2 - k \frac{m_2 m_3}{r},$$

y su momento angular es:

$$C(B) = \frac{m_2 m_3}{(m_2 + m_3)} (r \times \dot{r}).$$

La energía del cuerpo que se aleja, en este caso  $m_1$ , está dada por la expresión:

$$E(m_1) = \frac{1}{2} \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{M} \dot{\rho}^2 - k \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}},$$

y su momento angular tiene la expresión:

$$C(m_1) = \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{M} (\rho \times \dot{\rho}).$$

Cuando la distancia del cuerpo  $m_1$ , respecto al bárcentro del sistema binario, es muy grande, su energía se puede expresar asintóticamente como:

$$E(m_1) \sim \frac{1}{2} \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{M} \dot{\rho}^2 - k \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{\rho}.$$

## V. COMENTARIOS

En los casos estudiados, el movimiento del sistema de tres cuerpos se realiza en un plano; ésta es una restricción muy importante. Otra observación es que los resultados para los diferentes tipos de movimiento se han obtenido a partir de procesos de integración numérica y su comprobación se ha basado en la invariancia de las integrales del movimiento. Otra restricción, es que las masas de los cuerpos son consideradas iguales y que las distancias mutuas iniciales (para  $t = t_0$ ) son del mismo orden de magnitud.

## REFERENCIAS

- Becker, L. 1920, *M.N.R.A.S.*, 80, 590.
- Chazy, J. 1918, *Bull. Astr.*, 35, 321.
- Chazy, J. 1922, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, 39, 29.
- Chazy, J. 1929, *J. Math. Pures Appl.*, 8, 353.
- Chazy, J. 1932, *Bull. Astr.*, 8, 403.
- Marchal, C. 1976, in *Long-Time Predictions in Dynamics*, eds. V. Szebehely and B.D. Tapley (Dordrecht: D. Reidel), p. 181.
- Zumkley, J. 1941, *Astr. Nachr.*, 272, 66.

