

EFFECTOS RELATIVISTAS EN LA ESTRUCTURA Y ESTABILIDAD DE ENANAS BLANCAS MASIVAS

José Ma. Ibáñez Cabanell

Departamento de Mecánica y Astronomía
Facultad de Matemáticas, Universidad de Valencia
España

Received 1982 November 18

RESUMEN

Se han obtenido tres fórmulas de ajuste para la masa límite (newtoniana), la masa gravitacional máxima (relativista) y la energía de ligadura de varias secuencias de enanas blancas con diferentes composiciones químicas. Hemos calculado el valor del índice adiabático medio (i.a.m.) para cada modelo. El valor crítico de dicho i.a.m. es mayor que el clásico de $4/3$; ello se traduce, por ejemplo, en la aparición de la inestabilidad relativista en 1.3430, para el caso de enanas de carbono. Este resultado es ratificado por los cálculos hidrodinámicos.

ABSTRACT

We obtain numerical fits for the limit mass (newtonian), maximum gravitational mass (relativistic), and binding energy for several sequences of white dwarfs of different chemical compositions. We calculate the value of the average adiabatic index for each model. The critical value of this index is larger than the classical value of $4/3$; this implies, for example, that for carbon dwarfs the relativistic instability appears at 1.3430. This results is confirmed by the hydrodynamical calculations.

Key words: HYDRODYNAMICS – STARS-WHITE DWARFS

I. INTRODUCCION

Configuraciones tipo enana blanca (EB) aparecen bien como entes individuales —son el destino de las estrellas de masa ‘pequeña’: $M \lesssim 6 \pm 2 M_{\odot}$ — o en los núcleos (con diferentes composiciones químicas) de las estrellas ‘masivas’ ($8 \pm 3 \lesssim M \lesssim 100 \pm 30 M_{\odot}$), ‘poco masivas’ ($8 \lesssim M \lesssim 12 M_{\odot}$) o de masa ‘intermedia’ ($6 \pm 2 \lesssim M \lesssim 8 \pm 2 M_{\odot}$). Este es el escenario del colapso estelar en el caso de estrellas simples (Canal 1980).

En los sistemas binarios apretados (SBA), varios modelos de EB que acretan material de su compañera han sido propuestos en los últimos años como fuentes de las Supernovas de tipo I (SNI) y/o de las estrellas de neutrones (EN) (Wheeler 1974; Taam 1980; Canal e Isern 1980; Canal *et al.* 1980, 1982).

En ambos casos la masa máxima que una configuración tipo EB puede tener es decisiva para su evolución posterior. En este sentido creemos interesante el deducir una fórmula sencilla para la ‘masa límite’ de las EB con composición química arbitraria que generalice la de Chandrasekhar (1939).

En las EB masivas los efectos relativistas “comienzan a ser relevantes”, al menos desde un punto de vista cualitativo, en dos aspectos: (i) la existencia de una ‘masa máxima’, $M_G^{(max)}$, para densidades centrales finitas, $\rho_{c(crit)}$, (ii) el valor del índice adiabático medio crítico, $\bar{\Gamma}_{1(crit)}$, se hace mayor que el clásico de $4/3$.

En relación con estos dos aspectos presentamos, en este trabajo, (i) una expresión que nos permite conocer

el valor de $M_G^{(max)}$ para EB de composición química arbitraria y (ii) la puesta a punto de un código hidrodinámico y su aplicación en la línea de destacar el comportamiento dinámico de EB con: $\bar{\Gamma}_1 < \bar{\Gamma}_{1(crit)}$.

II. ECUACIONES DE ESTRUCTURA ESTELAR RELATIVISTA

Las ecuaciones fundamentales de estructura estelar relativista —para materia ‘fría’— son (Misner, Thorne y Wheeler 1973):

$$dp/dr = -(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)/\{r(r-2m)\} \quad (1)$$

$$dm/dr = 4\pi r^2 \rho \quad (2)$$

$$d\Phi/dr = -(\rho + p)^{-1} (dp/dr) \quad (3)$$

($c = G = 1$),

donde se ha considerado simetría esférica, de modo que el elemento de línea espacio-tiempo es:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$y \quad m \equiv (r/2)(1 - e^{-2\Lambda})$$

Las condiciones en el centro son: $m(0) = 0$, y en

la superficie: $p(R) = p_{\text{sup}}$ (tomaremos $p_{\text{sup}} = 0$), $\Phi(R) = \ln / (1 - 2M_g/R)$, $M_G \equiv m(R)$.

Otras magnitudes calculadas son: (i) Masa 'uam': $M_A = \int_0^R \rho_0 \, d\nu$, (ii) masa 'propia': $M_P = \int_0^R \rho \, d\nu$, donde ρ y ρ_0 son las densidades de masa-energía y de masa material, respectivamente, y $d\nu = 4\pi r^2 e^\Lambda dr$, (iii) energía gravitacional: $\Omega = M_G - M_P$, (iv) energía interna: $U = M_P - M_A$, (v) energía de ligadura: $E_b = M_G - M_A$, (vi) índice adiabático medio: $\bar{\Gamma}_1 = \int_0^R \Gamma_1 p \, d\nu / \int_0^R p \, d\nu$, $\Gamma_1 = (1 + \rho/p) (dp/d\rho)$, (vii) el desplazamiento al rojo gravitacional: $z(r) = e^{-\Phi} - 1$ se ha calculado en el centro y en la superficie.

El método de integración utilizado es un Runge-Kutta de 4° orden.

III. MASA MAXIMA DE ENANAS BLANCAS

Como señalábamos en la introducción uno de nuestros objetivos es comparar las masas límite y crítica que resultan de resolver las ecuaciones de estructura estelar en dos teorías de la gravitación: la newtoniana y la einsteniana, respectivamente. No consideraremos, pues, efectos debidos a las reacciones picnonucleares o a la desintegración β -inversa (Hamada y Salpeter 1961; Canal y Schatzman 1976).

La ecuación de estado (EE) utilizada es la de Salpeter y Zapolski (SALZA; Salpeter 1961; Salpeter y Zapolski 1967):

$p(\text{dinas/cm}^2) = p_{\text{CH}} + p_{\text{C}} + p_{\text{TF}}$
donde: $p_{\text{CH}} = A f(x)$ es la contribución del gas de electrones degenerado (Chandrasekhar 1939) $A = 6.002 \times 10^{22}$ y $x \equiv p_F/m_e c$, p_F es el momento de Fermi y p_{C} y p_{TF} son las correcciones colombianas y de Thomas-Fermi debidas a las interacciones entre los electrones y los iones:

$$p_{\text{C}} = -5.47 \times 10^{20} x^4 Z^{2/3}$$

$$p_{\text{TF}} = -2.142 \times 10^{18} x^5 (1 + x^2)^{-1/2} Z^{4/3}$$

siendo Z la carga de los iones.

La densidad de masa-energía es: $\rho = \rho_0(x) + u(x)/c^2$ (g/cm^3) con: $\rho_0(x) = Bx^3$, $B = 9.738 \times 10^5 \mu_e$ (μ_e es el peso molecular medio por electrón); $u_{\text{CH}} = A g(x)$, $u_{\text{C}} = -1.644 \times 10^{21} x^4 Z^{2/3}$, $u_{\text{TF}} = -6.428 \times 10^{18} x^5 (1 + x^2)^{1/2} Z^{4/3}$.

Las correcciones en la EE debidas a las energías de intercambio y de correlación han sido calculadas por Salpeter (*op. cit.* 1961) e incorporadas en algunos de nuestros cálculos previos. Dado que sus efectos eran despreciables al ser del mismo orden que la cota de error establecida en la integración numérica ($\lesssim 10^{-5}$) y el gasto consiguiente en tiempo de cálculo, se decidió eliminarlas en los cálculos posteriores.

Una primera consecuencia que tiene la consideración de las reacciones picnonucleares y las capturas electrónicas (CE) sobre los núcleos presentes cuando $\rho \geq \rho_{\text{CE}}$

(ρ_{CE} es la densidad umbral frente a CE) es el cambio en la composición química de la estrella: aumento de las abundancias de elementos pesados y disminución de μ_e . Consiguientemente la presión disminuye. Estos efectos ya han sido incorporados en los cálculos newtonianos de Hamada y Salpeter (*op. cit.* 1961): las curvas $M(R)$ presentan un máximo para valores de la densidad central $\rho_c = \rho_{\text{CE}}$. Si tenemos en cuenta que para el caso de EB de carbono tenemos: $\rho_{\text{CE}}(^{12}\text{C}) > \rho_{\text{c(crit)}}$ (definida más adelante), y que nuestro interés reside en aislar los efectos relativistas en las propiedades macroscópicas de EB masivas, parece justificado el que no tengamos en cuenta ambos fenómenos. Su influencia en la dinámica del colapso la comentaremos más adelante.

Ya hemos citado los cálculos newtonianos de Hamada y Salpeter; Koester (1978) ha considerado los efectos de la temperatura en la relación masa-radio. Las ecuaciones relativistas fueron resueltas por Chandrasekhar y Tooper (1964) para $\mu_e = 2$ y con la EE de un gas de electrones completamente degenerado.

Nosotros hemos construido un conjunto de secuencias de modelos de tal modo que cada secuencia se obtiene para una composición química homogénea dada y haciendo variar ρ_c . Hemos examinado los rangos de Z y μ_e : $1 \leq Z \leq 28$, $1 \leq \mu_e \leq 3$.

La función $M_G(\rho_c, Z, \mu_e)$ decrece con Z y μ_e , pero crece con ρ_c , alcanzando un máximo, $M_G^{(\text{max})}$, para una densidad central, $\rho_{\text{c(crit)}}$ que varía en el intervalo $\simeq (5 - 50) \times 10^9 \text{ g/cm}^3$ (según los valores de Z y μ_e). Las ecuaciones newtonianas se han resuelto para la misma EE y para grandes valores de ρ_c a fin de determinar la ley que gobierna la relación: $M_\infty(Z, \mu_e)$.

La Tabla 1 muestra las propiedades macroscópicas de EB con $M_G = M_G^{(\text{max})}$ correspondientes a algunas de las secuencias estudiadas. Las tres últimas columnas de dicha tabla corresponden al radio clásico, R_{CL} , y masa, M_{CL} , de la configuración clásica —con la misma densidad central que la relativista—, así como la masa límite de la secuencia, M_∞ .

En lugar de la relación $M_G(R)$ hemos representado en la Figura 1 un detalle de las funciones $z_s(\rho_c)$ y $z_c(\rho_c)$ para dos secuencias de EB —carbono y hierro—; la primera función alcanza un máximo para $\log \rho_c(\text{g/cm}^3) \gtrsim 14.6$ (donde la EE ya no es válida), mientras que la función $z_c(\rho_c)$ es monótona creciente como se desprende de la definición:

$$1 + z_c = (1 - 2M_G/R)^{-1/2} \int_0^R (\rho + p)^{-1} (-dp).$$

La función $\bar{\Gamma}_1(\rho_c)$ es monótona decreciente hasta alcanzar un mínimo de $\simeq 1.343$, para después crecer —al ser los efectos relativistas cada vez más importantes—. En consecuencia hay que destacar que se verifica: $\bar{\Gamma}_1(\text{crit}) \equiv \bar{\Gamma}_1(\rho_{\text{c(crit)}}) > 4/3$ para cualquier composición química; en particular, $\bar{\Gamma}_1(\text{crit}) = 1.34305$ (para la secuencia de EB de ^{12}C) y 1.34280 (para EB de ^{56}Fe).

Tomando los valores numéricos de: M_∞ , $M_G^{(\text{max})}$ y $-E_b^{(\text{max})}$ (energía de ligadura del modelo con $M_G =$

TABLA 1

PROPIEDADES MACROSCOPICAS DE ENANAS BLANCAS CON $M_G = M_G^{(max)}$ Y PARA DIFERENTES SECUENCIAS

$(Z; \mu_e)$	x_c	ρ_c (10^{10} g/cm ³)	p_c (10^{28} dyn/cm ²)	R (km)	M_G (M_\odot)	Ω (10^{50} erg)	U (10^{50} erg)	$-E_b$ (10^{50} erg)	R_{CL} (km)	M_{CL} (M_\odot)	M_∞ (M_\odot)
(2; 2)	23.4	2.523	3.597	1000	1.4020	-69.59	64.04	5.55	1005	1.4277	1.4412
(6; 2)	23.4	2.523	3.565	995	1.3860	-68.30	62.80	5.52	1000	1.4112	1.4247
(8; 2)	23.4	2.523	3.556	993	1.3796	-67.75	62.24	5.51	998	1.4046	1.4181
(12; 2)	23.4	2.523	3.532	990	1.3684	-66.84	61.33	5.51	995	1.3931	1.4065
(20; 2)	23.4	2.523	3.499	984	1.3497	-65.32	59.80	5.50	989	1.3738	1.3871
(20; 2.2)	24.5	3.177	4.188	860	1.1173	-51.45	47.26	4.19	861	1.1364	1.1464
(26; 2.154)	24.7	3.177	4.276	869	1.1548	-54.40	49.90	4.48	871	1.1750	1.1853
(28; 2.071)	24.1	2.831	3.855	923	1.2442	-59.25	54.23	5.02	927	1.2661	1.2778

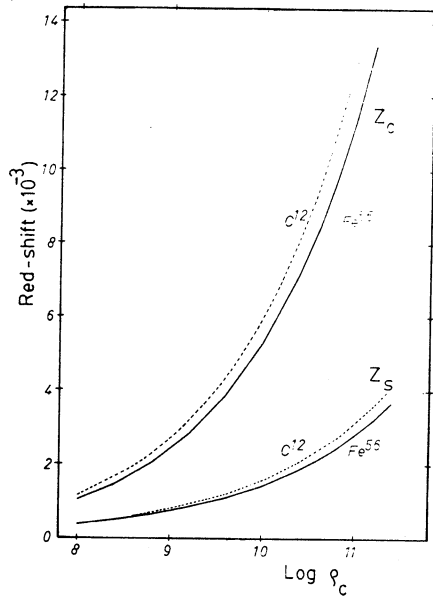


Fig. 1. Desplazamiento gravitacional al rojo en la superficie z_s y en el centro z_c como funciones de ρ_c .

TABLA 2

FUNCIONES DE AJUSTES DEL TIPO $y = q(z) \mu_e^p$

Z	M_∞/M_\odot		$M_G^{(max)}/M_\odot$		$-E_b^{(max)}/10^{50}$ erg	
	q	p	q	p	q	p
1	5.7877	-2.000	5.5609	-1.9829	41.7613	-2.9094
2	5.7647	-2.000	5.5384	-1.9827	41.6273	-2.9101
6	5.6998	-2.000	5.4724	-1.9827	41.1795	-2.9100
12	5.6267	-2.000	5.3982	-1.9828	40.7192	-2.9108
20	5.5492	-2.000	5.3148	-1.9828	40.1817	-2.9115
26	5.5049	-2.001	5.2593	-1.9829	39.8147	-2.9120

$M_G^{(max)}$), correspondientes a las diferentes secuencias y ajustándoles funciones del tipo: $y = q(Z) \mu_e^p$ hemos construido la Tabla 2. Los diagramas 'log y-log μ_e ' muestran, en los tres casos, una nube de puntos que pueden ser ajustados por polinomios de 2º grado en Z. El resultado final es:

$$M_\infty/M_\odot = (5.801 - 0.017Z + 2.35 \times 10^{-4} Z^2) \mu_e^{-2.000} \quad (4)$$

$$M_G^{max}/M_\odot = (5.573 - 0.017Z + 1.90 \times 10^{-4} Z^2) \mu_e^{-1.983} \quad (5)$$

$$-E_b^{max}/10^{50} \text{ erg} = (41.84 - 0.109Z + 1.22 \times 10^{-3} Z^2) \mu_e^{-2.911} \quad (6)$$

La desviación estándar relativa a los valores numéricos es, respectivamente: $\sigma_n = 1.12 \times 10^{-3}$, 7.7×10^{-4} , 1.26×10^{-3}

El ajuste es óptimo en $Z \simeq 6$: la diferencia relativa entre el valor de $M_G^{(max)}$ obtenido por la integración numérica (Tabla 1) y nuestra fórmula (5) es de $\simeq 8 \times 10^{-5}$ en el caso de EB de carbono.

Hamada y Salpeter (*op. cit.*) han propuesto la siguiente fórmula para la masa límite:

$$M_\infty = 1.4587 \times (2/\mu_e)^2 (p/p_{CH})^{3/2} M_\odot.$$

Creemos que nuestra expresión generaliza la masa de Chandrasekhar de una forma más sencilla.

Zel'dovich y Novikov (1971) obtienen la siguiente expresión para la energía total límite: $-E_\infty/10^{50}$ erg = $9.945\mu_e^{-1}M_\infty$, que es mayor (en un factor $\simeq 1.32$) que la energía de ligadura máxima obtenida en (6) — al hacer $Z = 0$ en las ecuaciones (5) y (6)—.

Finalmente, los datos más recientes de O²Eri B son: $R/R_\odot = 0.0137 \pm 0.0014$, $M/M_\odot = 0.43 \pm 0.02$, $cz = +20 \pm 3$ km/seg (Wegner 1979); el área de error experimental es cortada por nuestras curvas teóricas $M_G(R)$ correspondientes a las secuencias de EB desde las de ²He hasta las de ¹⁶O y para $\rho_c \simeq 10^6$ g/cm³.

IV. ECUACIONES DE LA HIDRODINAMICA RELATIVISTA

La forma más general del elemento de línea que describe el campo gravitatorio en el interior de una estrella tal que se encuentra ejecutando movimientos (oscilaciones radiales, colapso, ...) que preservan la simetría esférica es:

$$ds^2 = -a^2(\mu, t)dt^2 + b^2(\mu, t)d\mu^2 + R^2(\mu, t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

(Misner y Sharp 1964; May y White 1966, 1967); la coordenada ' μ ' se mueve junto ('comoving') con una capa del fluido y puede interpretarse como la masa 'uam' contenida en una esfera de radio ' R '. Como consecuencia de la conservación del número bariónico resulta: $b = 1/4\pi\rho_0 R^2$.

Las ecuaciones de Einstein se pueden reducir al siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales (en la notación de May y White):

$$u_t = -a(4\pi R^2 \Gamma p_\mu / w + m/R^2 + 4\pi p R) \quad (7)$$

$$R_t = au \quad (8)$$

$$(\rho_0 R^2)_t / \rho_0 R^2 = -au_\mu / R_\mu \quad (9)$$

$$(au)_\mu / aw = \{\epsilon_\mu + p(1/\rho_0)_\mu\} / w \quad (10)$$

$$\epsilon_t = -p(1/\rho_0)_t \quad (11)$$

siendo: (i) $w = (\rho + p)/\rho_0$ la entalpía específica, (ii) la masa gravitacional $m = \int_0^\mu 4\pi\rho R^2 R_\mu d\mu$. Otras magnitudes incorporadas al código numérico son: (iii) Masa 'propia': $m_p = \int_0^\mu 4\pi\rho R^2 b d\mu$ y el (iv) invariante escalar: $R = (1/2) R_{ij}k^i R^{kl}_{kl} = E^2 + 2\bar{E}^2 + F^2 + 2\bar{F}^2$ donde $E = (2m/R^3) - 4\pi(\rho + p)$, $\bar{E} = (1/aR) \{u_t - (R_\mu a_\mu)/b^2\}$, $F = 2m/R^3$, $\bar{F} = -(1/R) \{(-uu_\mu/R_\mu) + 4\pi\rho_0 R^2 \Gamma_\mu\}$, $\Gamma = R_\mu/b$.

La integración numérica de las ecuaciones anteriores

se ha realizado utilizando un esquema en diferencias finitas desarrollado por May y White (1967) al que se han incorporado las magnitudes (iii) y (iv): Se divide la estrella en ' J ' capas esféricas y se varía la coordenada temporal en una cantidad $\Delta t^{n+1/2}$ que debe verificar la condición de estabilidad de Courant. Tendremos, pues, variables del tipo X_j^n (definidas en la capa ' j ' y en el instante ' t^n ') o del tipo $X_{j-1/2}^{n+1/2}$ (definidas en la zona entre las capas ' j ' y ' $j-1$ ' y en un instante intermedio entre ' t^n ' y ' t^{n+1} ').

Un criterio de la precisión del código numérico viene dado por la condición: $m(\mu, t) = m(\mu, 0) = M_G$, cuando la presión en la superficie $p(\mu_s)$ es nula. Definiendo la cantidad: $\delta_j = (m_j^n - m_j^0)/m_j^0$, se ha comprobado que ésta llega a ser $\lesssim 10^{-5}$ en cálculos hidrodinámicos en los que no se han originado ondas de choque y para más de 50000 modelos.

El tratamiento de las ondas de choque se ha hecho utilizando la técnica de incorporar una "viscosidad artificial". Se trata de un mecanismo disipativo sugerido por Von Neuman y Richtmyer (Richtmyer 1967, p. 312) que difumina la onda de choque sobre varias zonas de tal modo que el espesor de ésta es prácticamente independiente de su intensidad así como de la densidad y presión del material en el que se propaga.

Finalmente, son múltiples las causas que pueden aconsejar el detener un cálculo hidrodinámico y que podemos agrupar en dos clases: a) Las que obedecen a criterios de ahorro de tiempo de cálculo, cuando ya la información es suficiente. Así pues, se han fijado límites dados bien por el número total de modelos a calcular (NMOD), o por un valor prefijado de la coordenada temporal, t_F . b) Las debidas a la exigencia de significado físico. Así por ejemplo, la formación de un horizonte aparente de sucesos ($g_{00} \rightarrow 0$) viene precedida por "anomalías numéricas" tales como: $\Gamma \rightarrow 0$, $u \rightarrow 1$, $\Delta t \rightarrow 0$, ... Si aceptamos como válida la situación descrita por la EE hay que adoptar algún criterio para detener el cálculo. En las Tablas 5 y 8 se ha indicado por (U) la causa debida a la aparición de alguna de estas anomalías numéricas.

V. DINAMICA DEL COLAPSO DE ENANAS BLANCAS CON MASA PROXIMA AL LIMITE DE ESTABILIDAD RELATIVISTA

En lo que sigue hemos tomado diferentes modelos iniciales (en el código numérico) de EB con propiedades macroscópicas que obtuvimos en los cálculos de estructura (§III) pero con una distribución homogénea de las variables termodinámicas. En consecuencia, dichos modelos poseen un gradiente de presión nulo, y al inyectarlos en el código numérico inducirán inmediatamente un campo de velocidades no nulo. La convergencia hacia la solución exacta tiene lugar en los primeros milisegundos.

En este epígrafe hemos considerado tres casos. El primero es una simple prueba del código numérico: 'caída libre' ($p = 0$). El segundo punto recoge el estudio hidro-

dinámico de EB en función de la masa y para una misma EE (la de SALZA). Finalmente en el tercer apartado se toma un único modelo inicial y se analiza el comportamiento dinámico frente a diferentes EE del tipo ‘polí-tropo’.

a) *Caída libre* (EE: $p = 0$)

El modelo inicial EB de ^{12}C con masa próxima a la crítica tiene las características señaladas en la Tabla 3.

La solución exacta es:

$$(8\pi\rho_0/3)^{1/2} t = \chi^{1/2} (1 - \chi)^{1/2} + \arcsen\sqrt{1 - \chi}$$

con: $\chi \equiv R/R^0$, $R^0 = R(\mu, 0)$ (Rose 1973) siendo el ‘tiempo de caída libre’: $\tau_{\text{ff}} \equiv t(\chi = 0) = (32\rho_0/3\pi)^{-1/2}$.

El colapso es ‘homólogo’ (Tabla 4), verificándose la relación: $\theta = \chi^{-3}$ (Cox y Giulì 1968) siendo: $\theta \equiv$ densidad instante ‘t’/inicial.

La Figura 2 muestra la función $R(t)$ para diez capas diferentes. El invariante escalar ‘ \mathcal{R} ’ tiende a infinito como indica la Figura 3 en la que se ha representado

el valor relativo al inicial y para la capa 48 ($R_{48}^0 = 947$ km). Finalmente, en la Figura 4 comparamos la solución teórica (curva continua) y la numérica (puntos).

b) *Dinámica del colapso de EB en función de la masa*

Dos conjuntos de modelos iniciales de EB se han

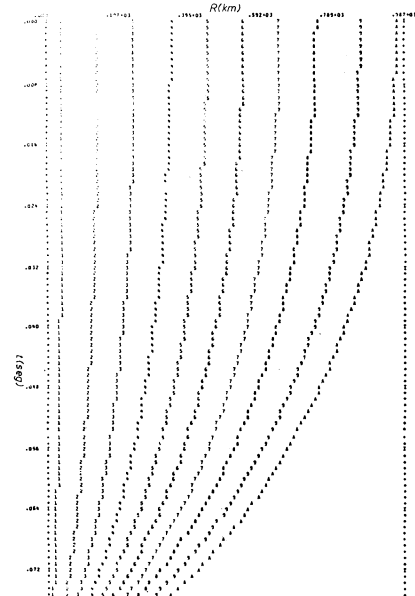


Fig. 2. R como función del tiempo coordinado ($p = 0$)

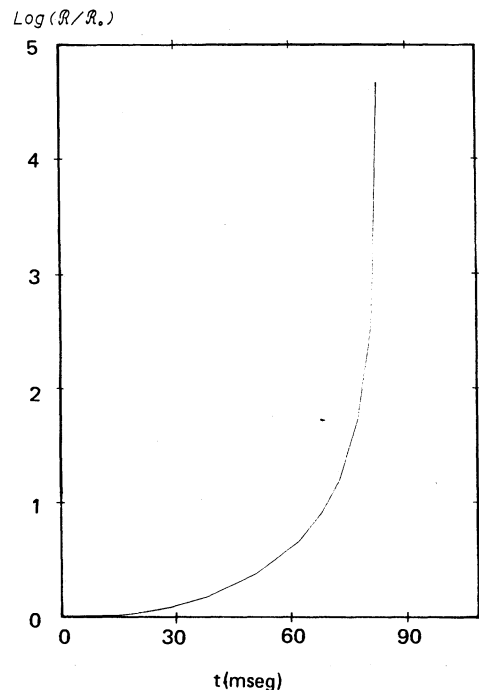


Fig. 3. Invariante escalar $\mathcal{R}(t)$ en el caso A

TABLA 3

ALGUNAS PROPIEDADES DEL MODELO INICIAL
(Casos A y C)

Parametro	Valor
$\langle \rho \rangle$	$6.43 \times 10^8 \text{ g/cm}^3$
$\langle \epsilon \rangle$	$1.16 \times 10^{-3} \text{ erg/g}$
P	$2.64 \times 10^{26} \text{ dinas/cm}^2$
M_A	$1.3844 M_\odot$
M_P	$1.3860 M_\odot$
M_G	$1.3843 M_\odot$
R	1007 km
T_{ff}	82.8 msec.
g_{00}	0.9968

TABLA 4

HOMOLOGIA DEL COLAPSO EN CAIDA LIBRE

χ^a	t (m seg)	δt^b (%)	θ^c
0.9903	10.15	2.40	1.03
0.8616	38.10	0.60	1.56
0.5998	61.75	0.35	4.63
0.3982	72.45	0.29	15.84
0.1758	79.90	0.25	184.0
0.0953	81.60	0.25	1156
0.0421	82.35	0.24	13402
0.0228	82.55	0.24	84159

a. $\chi \equiv R_j(n)/R_j(0)$

b. $\delta t \equiv (t - t_{\text{num}})/t_{\text{num}}$

c. $\theta \equiv \rho_j - 1/2 |(\chi)/\rho^0|^{2-1/2} (\chi)$

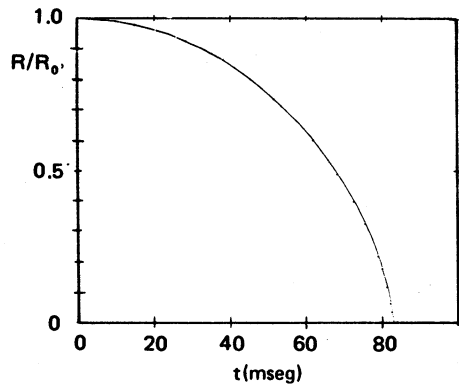


Fig. 4. Soluciones numérica (puntos) y teórica (curva continua) (caso A)

considerado: EB de carbono, $X(^{12}\text{C}) = 1$, y de carbono/oxígeno, $X(^{12}\text{C}) = X(^{16}\text{O}) = 0.5$; los radios se han fijado en 1004 y 1074 km para cada conjunto; los diferentes modelos iniciales se han obtenido variando la densidad media.

La Figura 5 muestra los puntos del plano ' $M_G - \rho_c$ ' que corresponden a los modelos iniciales de la familia de EB de carbono. La curva dibujada es resultado de los cálculos de estructura (§III) prolongados a grandes densidades y con la misma EE (la de SALZA); y aunque ésta no es válida —para $\rho_c \gtrsim 10^{11} \text{ g/cm}^3$ — es suficiente para nuestro objetivo de señalar la influencia de la masa en la dinámica del colapso.

La Tabla 5 resume las propiedades físicas de los modelos iniciales así como las características técnicas del cálculo hidrodinámico (el tiempo de cálculo en un ordenador UNIVAC 1100 es de $\simeq 210$ modelos/minuto). Esta tabla junto con las líneas de puntos de la Figura 5, que describen la trayectoria dinámica en el plano ' $M_G - \rho_c$ ', permiten establecer la siguiente clasificación:

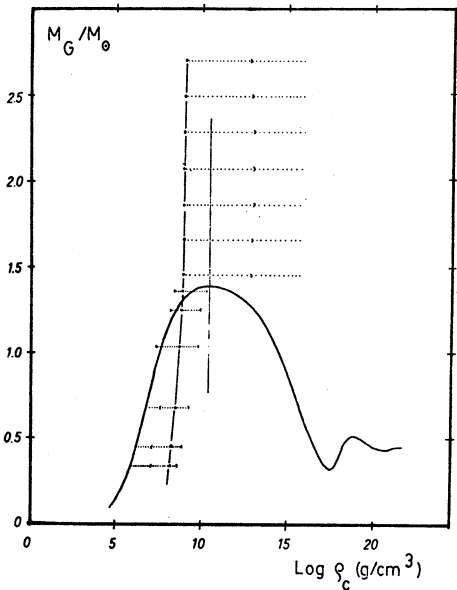


Fig. 5. Puntos del plano ' $M_G - \rho_c$ ' correspondientes a los modelos iniciales de EB de C (caso B)

(i) $M_G > M_G^{(\text{max})}$. Todos ellos colapsan hacia 'agujeros negros' (g_{00} tiende a cero). Evidentemente, si a densidades $\rho_c \gtrsim 10^{11} \text{ g/cm}^3$ hubiéramos tomado otras EE (por ej., la propuesta por Canuto 1974, 1975) el colapso se puede detener a densidades del orden de la materia nuclear (Ibáñez 1982).

A densidades $\rho > 10^{10} \text{ g/cm}^3$, el ritmo de las reacciones piconucleares, en el caso particular del ^{12}C , decrece desde valores $\tau(^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}) \lesssim 10$ años, llegando a ser competitivo con el tiempo característico del colapso τ_{ff} (Canal y Schatzman 1976, Tabla 3). Las CE sobre el ^{12}C

TABLA 5

MODELOS INICIALES Y CARACTERISTICAS TECNICAS DEL CALCULO HIDRODINAMICO (Caso B)

$X(^{12}\text{C}) = 1$						$X(^{12}\text{C}) = X(^{16}\text{O}) = 0.5$					
M_G (M_\odot)	$\langle \rho \rangle$ (CGS)	$\langle P \rangle$ (CGS)	t_F (mseg)	Notas ^a	NMOD	M_G (M_\odot)	$\langle \rho \rangle$ (CGS)	$\langle P \rangle$ (CGS)	t_F (mseg)	Notas ^a	NMOD
0.341	1.60E8	3.99E25	15643	N	32000	0.136	5.20E7	8.34E24	15528	N	31000
0.682	3.19E8	1.03E26	15638	N	32000	0.226	8.68E7	1.70E25	15546	N	31000
1.248	5.85E8	2.32E26	15747	N	32000	0.453	1.74E8	4.45E25	15537	N	31000
1.366	6.40E8	2.62E26	11129	TF	22500	0.679	2.60E8	7.73E25	14964	N	30000
1.457	6.83E8	2.86E26	350	U	30000	1.359	5.20E8	1.98E26	12333	N	25000
1.873	8.78E8	4.01E26	126	U	2100	1.528	5.85E8	2.32E26	233	U	28500
2.290	1.07E9	5.25E26	93	U	1800	1.783	6.83E8	2.85E26	152	U	2250
2.706	1.27E9	6.56E26	76	U	1650	2.038	7.80E8	3.41E26	120	U	1950
3.123	1.46E9	7.96E26	66	U	1650	2.293	8.78E8	4.00E26	102	U	1800
3.539	1.66E9	9.42E26	59	U	1500	2.548	9.76E8	4.60F26	90	U	1800

a. indica las causas por las que el cálculo se detiene (ver Tabla 8).

aparecen para $\tau_{CE}(^{12}\text{C}) = 3.49 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$, es decir, $\rho_{CE} > \rho_{c(\text{crit})}$; una vez se inicia el colapso, éstas contribuyen a acelerarlo, siendo el ritmo, $\tau_{CE}(^{12}\text{C})$, competitivo con τ_{ff} cuando es $\rho \geq 5.5 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$ (Canal y Schatzman, *op. cit.*).

Los resultados de este apartado tienen el interés de servir como prueba del código hidrodinámico y del ajuste entre los resultados numéricos de estructura y la dinámica estelar cuando M_G rebasa “no el límite de Chandrasekhar sino el establecido por nuestra expresión para $M_G(\text{max})$ ”.

TABLA 6
TIEMPOS DE COLAPSO^a

ξ	t_F/t_{ff}	ξ	t_F/t_{ff}
ENANAS DEL CARBONO (Caso B)			
4	2.215	6.5	1.293
4.5	1.782	7	1.244
5	1.574	7.5	1.206
5.5	1.444	8	1.176
6	1.347	8.5	1.151
ENANAS DE C/O (Caso B)			
3	2.682	4.5	1.434
3.5	1.889	5	1.334
4	1.594	—	—

a. $\xi \equiv \rho/(9.75 \times 10^7 \mu_e)$.

Si definimos las variables:

$$\eta \equiv t_F/t_{ff} - 1, \xi \equiv x^3/100 = \rho/9.75 \mu_e 10^7,$$

vemos en la Tabla 6 que para valores crecientes de ξ (y, por tanto, M_G crecientes) t_F tiende a

$$\tau_{ff} \left(\lim_{\xi \rightarrow \infty} \eta = 0 \right);$$

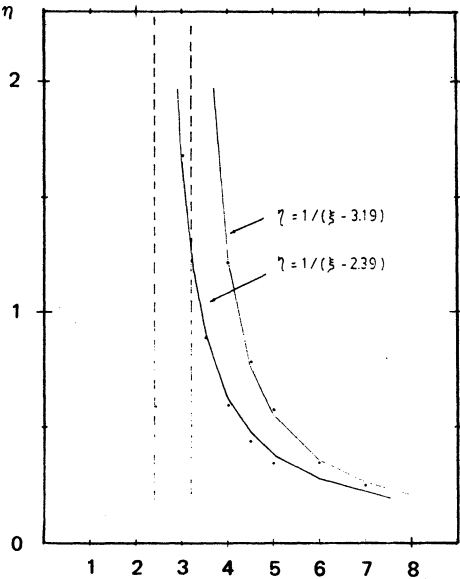


Fig. 6. Curvas de ajuste: $\eta = 1/(\xi - \xi_0)$

TABLA 7

EXTREMOS RELATIVOS DE LAS FUNCIONES $R_{s0}(t)$ y $\rho_{2-1/2}(t)$
(Caso B)

$X(^{12}\text{C}) = 1$ $M_G = 1.3660 M_\odot$ $R(50,0) = 984 \text{ km}$			$X(^{12}\text{C}) = X(^{16}\text{O}) = 0.5$ $M_G = 1.3586 M_\odot$ $R(50, 0) = 1052 \text{ km}$		
t (seg)	R_{s0} (km)	$\rho_{2-1/2}$ (g/cm ³)	t (seg)	R_{s0} (km)	$\rho_{2-1/2}$ (g/cm ³)
0.256	698	1.760E10	0.255	720	1.614E10
1.385	2716	2.385E8	1.416	2652	2.529E8
2.515	925	7.896E9	2.528	968	6.768E9
3.645	2339	4.116E8	3.640	2350	4.030E8
4.650	1013	5.935E9	4.751	1035	5.497E9
5.655	2149	5.438E8	5.812	2178	5.144E8
6.653	1042	5.314E9	6.773	1087	4.708E9
7.487	2036	6.523E8	7.733	2072	6.073E8
8.366	1090	4.725E9	8.642	1129	4.184E9
9.120	1956	7.420E8	9.444	1995	6.877E8
9.873	1120	4.369E9	10.323	1179	3.659E9
10.627	1899	8.193E8	11.077	1935	7.611E8

$R(50, 0) \equiv R_{s0}^{(0)}$.

por otro lado, resulta que t_F tiende a infinito para un valor de ξ , ξ_0 , que corresponde a un modelo estable. Haciendo un ajuste por mínimos cuadrados de una hipérbola: $\eta = 1/(\xi - \xi_0)$, a varios de los valores de la Tabla 6 (Figura 6) obtenemos: $\xi_0 = 3.19$ y 2.39 para EB de ^{12}C y de C/O respectivamente, siendo las masas correspondientes de $1.335 M_\odot$ y de $1.225 M_\odot$ (es decir, los modelos 'intersección' con la curva de equilibrio de la Figura 5).

(ii) $M_G^{(\max)} \gtrsim M \gtrsim 1 M_\odot$. Este grupo de modelos oscilan alrededor del que corresponde a la configuración de equilibrio (Tabla 7). Las oscilaciones son amortiguadas debido a la actuación de la viscosidad artificial introducida en el código hidrodinámico.

El período de la primera oscilación aumenta cuando la masa disminuye: 2.3 seg ($M_G = 1.366 M_\odot$), 2.5 seg ($M_G = 1.248 M_\odot$), 3.3 seg ($M_G = 1.040 M_\odot$). La Figura 7 muestra el comportamiento de la función 'R(t)' para diferentes valores de la masa coordenada y en el caso de una EB de C/O con masa $M_G = 1.360 M_\odot$.

Si ajustamos los extremos relativos de las funciones ' $R_{50}(t)$ ' y ' $\rho_{2-1/2}(t)$ ' de la Tabla 7 mediante exponenciales, se obtiene (para la EB de C/O con $M_G = 1.360 M_\odot$):

$$R^{(\max)} = 2685 \exp(-0.032 t) \text{ km}$$

$$R^{(\min)} = 794 \exp(0.043 t) \text{ km}$$

$$\rho^{(\max)} = 1.2175 \times 10^{10} \exp(-0.130 t) \text{ g/cm}$$

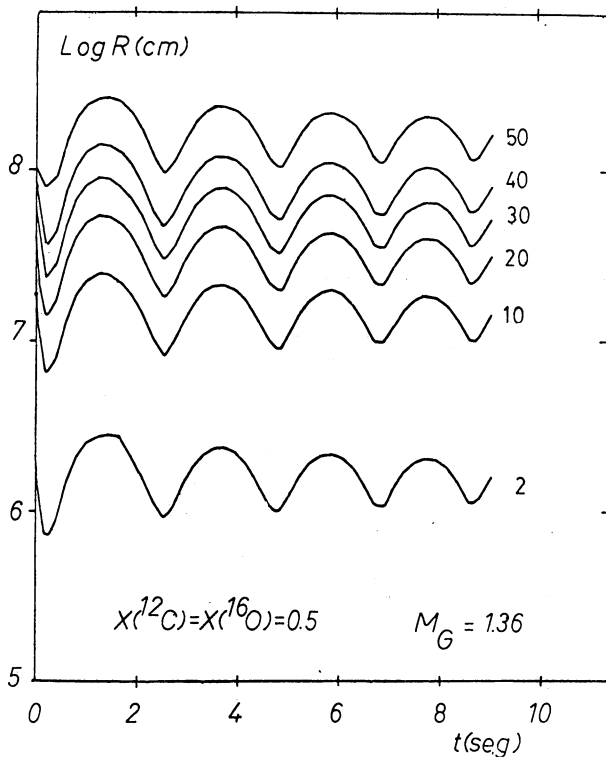


Fig. 7. Función R(t) para una EB de C/O (caso B)

$$\rho^{(\min)} = 2.4810 \times 10^8 \exp(0.109 t) \text{ g/cm}$$

las exponenciales —creciente y decreciente— correspondientes a cada función convergen al cabo de un $t \simeq 16$ seg. hacia un modelo que, junto con los de la curva de equilibrio (de la Figura 5) para la misma ρ_c ó M_G , quedan dentro de un área de error limitada por un rectángulo de lados $\simeq 0.01$ (en M_\odot) y $\simeq 0.01$ (log ρ_c).

(iii) $M_G \lesssim 1 M_\odot$. La característica común es la de que éstos se expanden hacia el modelo de la curva $M_G(\rho_c)$ con la misma masa. El cálculo no se ha seguido el tiempo suficiente como para poder establecer conclusiones claras sobre si, por ejemplo, se trata de un comportamiento oscilatorio —con periodos grandes— o bien si se alcanzan velocidades de escape.

C) DINAMICA DEL COLAPSO DE EB EN FUNCION DEL INDICE ADIABATICO

Dos tipos de 'ley gamma' se pueden considerar: (i) $p = k_1 \rho^\gamma$ y (ii) $p = k_2 n_B^{\Gamma_1}$ con $\rho = m_B n_B (1 + \epsilon)$, siendo m_B y n_B la masa y densidad de número bariónico, respectivamente.

A partir de la relación termodinámica:

$$p = -d(\rho/n_B)/d(1/n_B),$$

se pueden escribir las (i) y (ii) en forma paramétrica (Bludman 1973):

$$(i) \rho = m_B n_B \{1 - k_1 (m_B n_B)^{1/n}\}^{-n} \quad (12a)$$

$$p = k_1^n (m_B n_B)^\gamma \{1 - k_1 (m_B n_B)^{1/n}\}^{-(1+n)} \quad (12b)$$

$$\gamma = 1 + 1/n \quad (12c)$$

$$(ii) \rho = m_B n_B + (k_2/(\Gamma_1 - 1)) n_B^{\Gamma_1} \quad (13a)$$

$$p = (\Gamma_1 - 1)(\rho - m_B n_B) \quad (13b)$$

En el límite clásico, tanto la (i) como la (ii) se reducen a la EE de un polítropo de índice 'n'. Las ecuaciones de equilibrio hidrostático newtonianas fueron integradas por Chandrasekhar (1939) obteniendo inestabilidad para valores de $\Gamma_1 < 4/3$. Bludman (1973) ha estudiado la estabilidad, frente a oscilaciones radiales, de modelos relativistas que obedecen la (12 a,b); de su análisis se desprende que el valor crítico de Γ_1 , $\Gamma_{1(\text{crit})}$, ya no es $4/3$ sino: $\Gamma_{1(\text{crit})} = (1 + \sigma)(4/3 + 1.73\sigma - 0.31\sigma)$ con $\sigma \equiv (\rho/p)_{\text{centro}}$.

Tomando como modelo inicial el del caso A (Tabla 3) y como EE la (ii) en la forma (13b), se ha estudiado el comportamiento hidrodinámico para diferentes valores

del índice 'n' ($\Gamma_1 = 1 + 1/n$). Las características generales de algunos de los casos considerados se indican en la Tabla 8.

TABLA 8
 CARACTERISTICAS TECNICAS DEL CALCULO
 HIDRODINAMICO

n	t _f ^a (mseg)	Notas ^b	NMOD ^c	Δt ^d (mseg)
2.80	840	TF	16900	VT1
2.84	842	TF	18100	VT1
2.86	294	N	7000	VT1
2.88	423	TF	10500	VT1
2.90	317	TF	10200	VT1
2.92	265	N	10500	1.8 × 10 ⁻⁶
2.94	226.5	N	10500	7.8 × 10 ⁻⁶
3.00	155.5	U	5754	2.1 × 10 ⁻⁵
3.50	84.0	TF	1679	VT1
4.00	85.1	TF	1709	0.04
10.0	83.0	N	6000	1.2 × 10 ⁻⁹

- a. t_f es el valor de t del último modelo.
- b. Las causas por las que el cálculo se detuvo: TF, cuando t = t_f; N cuando NMOD = N; U cuando u = 1, Γ < 0, Δt < 0.
- c. NMOD es número de modelos calculados.
- d. VT1 = Δt⁽⁰⁾ = 0.05 mseg.

Definiendo el 'tiempo característico de contracción', τ_p , como aquel para el cual se verifica:

$$\ln\{\rho_{j-1/2}^{(n)}/\rho_{j-1/2}^{(0)}\} = 1,$$

veimos en la Tabla 9 que, cuando el índice 'n' aumenta ' τ_p ' disminuye, de modo regular, en todas las capas; en el límite 'n → ∞' resulta el caso A).

Las Tablas 8 y 9 permiten establecer la clasificación siguiente:

(a) ' $n \lesssim 2.90$ '. El comportamiento hidrodinámico se caracteriza: i) una primera fase en la que hay una contracción homóloga —en las primeras etapas— (Tabla 10) y, ii) oscilaciones con una amplitud que decrece con el tiempo para un 'n' dado, así como para valores de 'n' crecientes (Tabla 11).

(b) ' $n \gtrsim 2.92$ '. El colapso es inevitable y, como se muestra en la Tabla 12, es homólogo en las primeras etapas, perdiéndose la homología en las capas más externas durante las últimas fases.

Si nos fijamos en el caso 'n = 2.92' tenemos: i) La trayectoria de diferentes capas en función del tiempo y la masa coordinadas se ha representado en las Figuras 8 y 9. ii) La densidad crece de forma exponencial para t ≃ 210 mseg. (Figura 10) llegando a alcanzar valores del

TABLA 9
 TIEMPOS CARACTERISTICOS DE CONTRACCION (mseg)
 (Caso C)

j \ n	2.80	2.84	2.86	2.88	2.90	2.92	2.94	3.00	3.50	4.00	10.0
25	53.5	53.5	53.4	53.4	53.4	53.4	53.4	53.4	53.4	53.4	53.4
26	53.5	53.5	53.5	53.5	53.5	53.5	53.5	53.5	53.4	53.4	53.4
27	53.7	53.6	53.6	53.6	53.6	53.6	53.6	53.5	53.4	53.4	53.4
28	53.9	53.8	53.8	53.8	53.8	53.7	53.7	53.7	53.5	53.4	53.4
29	54.4	54.3	54.2	54.2	54.1	54.1	54.0	53.9	53.5	53.4	53.4
30	55.2	55.0	54.9	54.8	54.7	54.7	54.6	54.4	53.7	53.5	53.4
31	56.5	56.2	56.1	55.9	55.8	55.7	55.5	55.2	53.9	53.6	53.4
32	58.5	58.1	57.9	57.7	57.5	57.3	57.1	56.6	54.4	53.8	53.4
33	60.9	60.4	60.2	60.0	59.7	59.5	59.3	58.6	55.3	54.1	53.4
34	63.5	63.0	62.7	62.5	62.3	62.0	61.8	61.1	56.8	54.8	53.4
35	66.2	65.7	65.4	65.2	64.9	64.7	64.4	63.7	58.9	56.0	53.4
36	69.2	68.6	68.3	68.1	67.8	67.5	67.3	66.6	61.6	57.9	53.4
37	72.5	71.9	71.6	71.3	71.0	70.7	70.4	69.6	64.4	60.5	53.5
38	76.2	75.5	75.2	74.9	74.6	74.2	74.0	73.1	67.5	63.5	53.6
39	80.2	79.5	79.1	78.8	78.4	78.2	77.8	76.9	70.9	66.7	53.8
40	84.6	83.8	83.4	83.1	82.7	82.4	82.1	81.1	74.6	70.2	54.3
41	89.3	88.5	88.1	87.7	87.4	87.0	86.7	85.6	78.8	74.2	55.3
42	94.4	93.6	93.2	92.8	92.4	92.0	91.7	90.6	83.4	78.4	57.1
43	99.8	99.0	98.7	98.3	97.9	97.5	97.1	96.0	—	83.2	60.3
44	105.2	104.6	104.3	104.0	103.6	103.3	103.0	101.8	—	—	64.7
45	110.5	110.0	109.7	109.5	109.2	109.0	108.7	107.8	—	—	69.8
46	116.6	116.2	116.0	115.8	115.5	115.3	115.1	114.3	—	—	75.6
47	124.8	124.4	124.2	124.0	123.8	123.6	123.4	122.6	—	—	81.8
48	137.2	136.5	136.2	136.0	135.7	135.5	135.3	134.5	—	—	—
49	160.0	156.0	155.4	154.9	154.7	154.5	154.4	—	—	—	—
50	x	x	x	x	193.4	190.0	189.7	—	—	—	—

Las capas 2 a 24 tienen un $\tau_p = 53.4$ (mseg). Los signos '—' y 'x' indican, respectivamente, que el cálculo se detuvo antes o que la capa correspondiente no llega a contraerse lo suficiente.

TABLA 10

VALORES DEL COCIENTE: $\chi \equiv R_j^{(n)}/R_j^0$ (Caso C: $n = 2.8$)

t (mseg)	χ_3	χ_{13}	χ_{23}	χ_{33}	χ_{49}
4.8	0.9979	0.9979	0.9979	0.9979	0.9979
16.0	0.9769	0.9769	0.9769	0.9769	0.9877
27.2	0.9322	0.9322	0.9322	0.9322	0.9757
38.4	0.8613	0.8613	0.8613	0.8614	0.9614
49.6	0.7598	0.7598	0.7598	0.7640	0.9438
60.8	0.6185	0.6185	0.6201	0.6562	0.9218
72.0	0.4153	0.4229	0.4630	0.5471	0.8941
82.4	0.3301	0.3346	0.3633	0.4476	0.8616

orden de: $\theta = 57500$. iii) La función g_{00} que, en $t \simeq 228$ mseg. valía 0.8, llega a alcanzar en $t_F = 265$ mseg un valor de $\simeq 10^{-12}$ (Figura 11).

Podemos concluir afirmando, pues, que el valor crítico de Γ_1 que resulta de nuestro análisis hidrodinámico es: $\Gamma_1^{(num)} = 1.3436 \pm 0.0012$ ($n = 2.91 \pm 0.01$) lo que está más de acuerdo con nuestros cálculos de estructura que con los de Bludman —que darían, para nuestro modelo inicial, $\sigma = 4.57 \times 10^{-4}$, un valor crítico de 1.3347—.

VI. CONCLUSIONES

1) Hemos calculado las propiedades macroscópicas de diferentes familias de EB obtenidas variando la den-

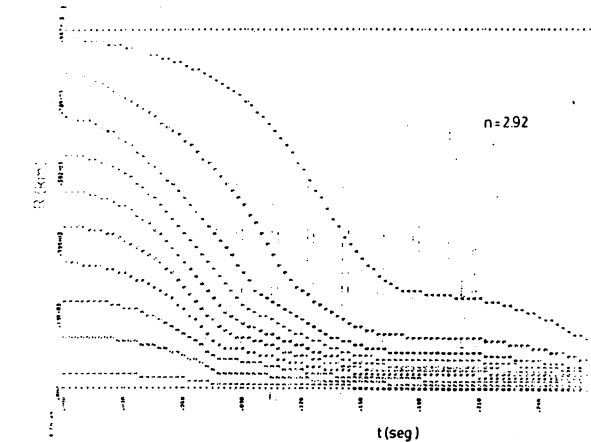


Figura 8. Función $R(t)$ (caso C: $n = 2.92$)

sidad central y la composición química, en el marco de la Relatividad General. Las fórmulas de ajuste que presentamos permiten conocer los valores de la masa crítica, la energía de ligadura correspondiente y la masa límite newtoniana, con una precisión $\lesssim 10^{-3}$, para una composición química homogénea dada.

La Tabla 1 presenta una pequeña muestra de los resultados; conviene señalar que en el caso de EB de ^{12}C , la densidad crítica relativista es menor que la umbral frente a capturas electrónicas.

TABLA 11

CARACTERISTICAS DE LAS PRIMERAS OCILACIONES
(Caso C: $n \leq 2.90$)

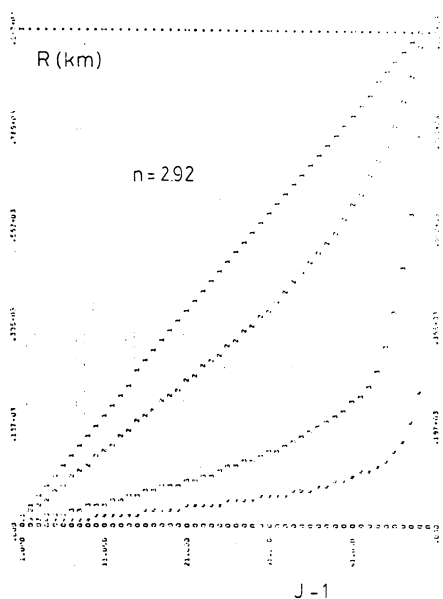
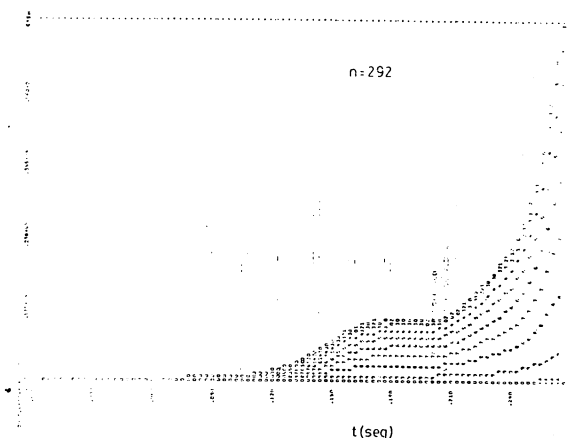
		n = 2.8			n = 2.88		
		j = 3	j = 49	t(mseg)	j = 3	j = 49	t(mseg)
R	1er. mínimo	8.1	400	168	5.5	314	172
	1er. máximo	21.3	876	352	15.1	775	412
	2o. mínimo	9.0	445	634	—	—	—
Θ	1er. máximo	123	2.4	168	412	4	172
	1er. mínimo	7.0	0.6	352	24	2	412
	2o. máximo	92	2.0	634	—	—	—

$\Theta \equiv \rho_{j-1/2}^{(n)}/\rho_{2-1/2}^0$; el signo '—' indica que el c-álculo se detuvo antes.

TABLA 12

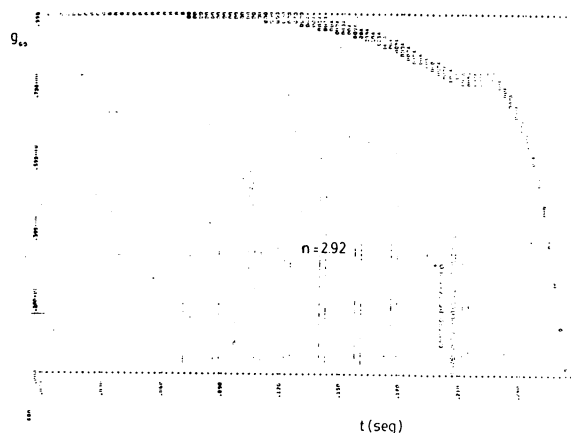
VALORES DEL COCIENTE: $\chi_j = R_j^{(n)}/R_j^0$
(Caso C: $n = 3$)

t(mseg)	χ_3	χ_8	χ_{13}	χ_{18}	χ_{23}	χ_{28}	χ_{33}	χ_{38}	χ_{43}	χ_{48}
22.5	0.9539	0.9539	0.9539	0.9539	0.9539	0.9539	0.9539	0.9539	0.9542	0.9714
43.5	0.8190	0.8190	0.8190	0.8190	0.8190	0.8190	0.8193	0.8259	0.8576	0.9279
84.0	0.2856	0.2868	0.2897	0.2963	0.3122	0.3437	0.3948	0.4714	0.5865	0.7790
155.5	4.21E-4	4.27E-4	4.67E-4	5.59E-4	7.74E-4	1.28E-3	2.45E-3	5.39E-3	1.61E-2	0.1642

Fig. 9. Función $R(\mu)$ (caso C: $n = 2.92$)Fig. 10. Función $\rho(t)$ (caso C: $n = 2.92$)

2) Nuestros resultados numéricos de estructura encuentran confirmación con los cálculos hidrodinámicos. Es de destacar el hecho de que configuraciones tipo EB pueden colapsar cuando el índice adiabático medio es mayor que el valor crítico clásico de $4/3$. En particular, la inestabilidad relativista aparece en $\bar{\Gamma}_1 \leq 1.3436$ para EB de carbono. Este hecho será objeto de un trabajo posterior en el que incorporaremos los efectos del atrapamiento de neutrinos en el colapso dinámico de EB que acrecientan material y dentro de los intentos de explorar mecanismos que expliquen el fenómeno SNI.

José Ma. Ibáñez Cabanell: Departamento de Mecánica y Astronomía, Facultad de Matemáticas, Universidad de Valencia, Burjassot-Valencia, España.

Fig. 11. Función $g_{00}(t)$ (caso C: $n = 2.92$)

En trabajo contiene algunos resultados de la tesis doctoral del autor, dirigida por el Dr. R. Canal (Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos, Universidad de Barcelona).

Las sugerencias del árbitro anónimo han sido de gran utilidad.

REFERENCIAS

- Bludman, S.A. 1973, *Ap. J.*, **183**, 637.
 Canal, R. 1980, *J. de Phys.*, **41**, C2-105.
 Canal, R. e Isern, J. 1980, en *IAU Colloquium No. 53, White Dwarfs and Variable Degenerate Stars* (Dordrecht: D. Reidel).
 Canal, R., Isern, J. y Labay, J. 1980, *Ap. J.*, **242**, L33.
 Canal, R., Isern, J. y Labay, J. 1982, en *Supernovae*, eds. M.J. Rees y R. Stoneham (Dordrecht: D. Reidel).
 Canuto V., 1974, *Ann Rev. Astron. Astrophysics*, **12**, 167.
 Canuto V., 1975, *Ann Rev. Astron. Astrophysics*, **13**, 335.
 Chandrasekhar, S. 1939, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*
 Chandrasekhar, S. y Tooper, R.F. 1964, *Ap. J.*, **139**, 1396.
 Cox, J.P. y Giuli, R.T. 1968, *Principles of Stellar Structure* (Gordon and Breach).
 Hamada, T. y Salpeter, E.E. 1961, *Ap. J.*, **134**, 683.
 Ibáñez, J. Ma. 1982, Universidad de Valencia, España.
 Koester, D. 1978, *Astr. and Ap.*, **64**, 289.
 May, M. y White, R.H. 1966, *Phys. Rev.*, **141**, 1232.
 May, M. y White, R.H. 1967, *Meth. Comp. Phys.*, **7**, 219.
 Misner, C.W. y Sharp, D.H. 1964, *Phys. Rev.*, **136B**, 571.
 Misner, C.W., Thorne, K.S. y Wheeler, J.A. 1973, *Gravitation* (Freeman Company).
 Richtmyer, R.D. y Morton, K.W. 1967, *Difference Methods for Initial-Value Problems* (John Wiley).
 Rose, W.K. 1973, *Astrophysics*, ed. Holt et al.
 Salpeter, E.E. 1961, *Ap. J.*, **134**, 669.
 Salpeter, E.E. y Zapolski, H.S. 1967, *Phys. Rev.*, **158**, 876.
 Taam, R.E. 1980, *Ap. J.*, **242**, 749.
 Wegner, G. 1979, *A.J.*, **84**, 650.
 Wheeler, J.C. 1974, *Ap. J.*, **187**, 337.
 Zel'dovich Ya. B., Novikov I.D. 1971, *Stars and Relativity*, Vol. I, (Chicago University Press).

