

MOVIMENTO ROTACIONAL-TRANSLACIONAL ACOPLADO, DE SATELITES ARTIFICIAIS

Maria Cecília Zanardi

Instituto Tecnológico de Aeronáutica
São José dos Campos - São Paulo, Brasil

RESUMO. O acoplamento entre o movimento rotacional e translacional de um satélite artificial da Terra é analisado, considerando a influência do achatamento da Terra e diferentes momentos principais de inércia para o satélite, sendo dois deles bem próximos. As equações do movimento são deduzidas utilizando formalismo Hamiltoniano, com o movimento rotacional descrito pelas variáveis de Andoyer e o movimento translacional pelas variáveis de Delaunay. Os desenvolvimentos consideram termos até o cubo do inverso do raio vetor, que une o centro de massa do satélite ao centro da Terra e são truncados na segunda potência da excentricidade. O método de Hori é aplicado para analisar as equações do movimento e a solução é apresentada em primeira ordem.

ABSTRACT. The coupling between the rotational and translational motion of an Earth's artificial satellite is analysed, considering the influence of the flattening of the Earth and different principal moments of inertia of the satellite, having two of them very close to each other. The equations of motion are derived by using Hamiltonian formalism, with the rotational motion described by the Andoyer's variables and the translational motion by the Delaunay's variables. These developments consider terms up to the inverse of the cube distance between the center of mass of the satellite and the Earth's center of mass, and neglect those terms where the power of the eccentricity is higher than two. Hori's method is applied for the analysis of the equations of motion and the first order solution is presented.

I. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo o estudo das equações do movimento de um satélite artificial da Terra em torno do seu centro de massa (movimento rotacional) acoplado ao movimento do centro de massa do satélite artificial (movimento translacional), levando-se em consideração o achatamento da Terra e admitindo-se que os momentos principais de inércia do satélite são desiguais, sendo que dois deles são bastante próximos e a diferença entre eles é considerada como uma perturbação adicional no processo de montagem das equações do movimento.

Não consideramos neste trabalho, comensurabilidades entre as frequências dos movimentos e singularidades nas equações utilizadas.

No estudo do movimento de um satélite artificial, devido à pequena ordem de grandeza dos termos de acoplamento, entre o movimento translacional e rotacional, eles são, em geral, desprezados, de tal maneira que a forma da órbita pode ser especificada "a priori". Esta especificação é então utilizada em conjunto com as equações do movimento rotacional do satélite para determinar o comportamento deste movimento. Ora, numa análise mais cuidadosa do movimento de satélites é bem possível que o estudo dos efeitos até a ordem de grandeza dos termos de acoplamento seja necessário. Neste trabalho procuramos dar uma forma de abordagem para o tratamento de tais problemas. É bem verdade que uma teoria completa necessitaria que todos os efeitos até esta ordem fossem considerados. Assim uma das contribuições desde trabalho é o estudo isolado dos ter-

mos de acoplamento do movimento translacional-rotacional de um satélite e sua influência no seu movimento translacional e no seu movimento rotacional.

Os resultados obtidos mostram o tipo da influência do achatamento da Terra sobre o movimento rotacional do satélite.

II. AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

As equações do movimento são deduzidas utilizando formalismo Hamiltoniano, com o movimento rotacional descrito pelas variáveis de Andoyer ($\ell_2, g_2, h_2, L_2, G_2, H_2$) e o movimento translacional pelas variáveis de Delaunay (ℓ, g, h, L, G, H). Estas variáveis estão apresentadas no apêndice deste trabalho.

Para descrever o movimento rotacional do satélite artificial foram adotadas as variáveis de Andoyer ao invés dos Ângulos de Euler, pois as anteriores são variáveis canônicas e podemos assim aplicar teorias de perturbação baseada em transformações canônicas para estudar este problema.

O sistema de referência inercial é um sistema geocêntrico com o eixo z na direção do polo Norte da Terra, o plano xy coincidindo com o plano do equador da Terra, sendo que o eixo x aponta ao longo da interseção do plano da eclíptica com o plano do equador da Terra e o eixo y completa o sistema, formando um sistema dextrógero.

Os desenvolvimentos em potência da excentricidade são truncados em segunda ordem e o potencial contém termos até o inverso do cubo do raio vetor, que une o centro de massa da Terra ao centro de massa do satélite.

A Hamiltoniana F do problema é expressa por:

$$F = F_0(L, L_2, G_2) + F_1(L_2, G_2, H_2, \ell_2, g_2, h_2, L, G, H, \ell, g, h) \quad (1)$$

onde:

$$F_0 = \frac{-\mu^4 M_2^3}{2L^2} + \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{C_2} - \frac{1}{2A_2} - \frac{1}{2B_2} \right] L_2^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A_2} + \frac{1}{B_2} \right] G_2^2 \right\} \quad (2)$$

$$F_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{B_2} - \frac{1}{A_2} \right) (G_2^2 - L_2^2) \cos 2\ell_2 + \frac{\mu^4 M_2^7}{L^6} \left\{ k_2 a_e^2 f_1(L, G, H, \ell, g) \right. \\ \left. + \frac{2C_2 - A_2 - B_2}{2M_2} f(L, G, H, \ell, g, h, L_2, G_2, H_2, \ell_2, g_2, h_2) + \frac{A_2 - B_2}{4M} f_3(L, G, H, \ell, \right. \\ \left. g, h, L_2, G_2, \ell_2, h_2, g_2) \right\} \quad (3)$$

sendo:

M_1 e M_2 - as massas da Terra e do satélite, respectivamente

a_e - raio equatorial da Terra

$A_1 = B_1, C_1$ - os momentos principais de inércia da Terra

$A_2 \approx B_2, C_2$ - os momentos principais de inércia do satélite.

$$K_2 = \frac{C_1 - A_1}{2M_1 a_e^2}$$

μ - constante gravitacional da Terra

f_1, f_2, f_3 - funções das variáveis indicadas, sendo que as variáveis ℓ, g, h, ℓ_2, g_2 e h_2 aparecem sempre como argumentos de cossenos. Estas funções são apresentadas na referência (1966) em termos da anomalia média ℓ , e também nas referências (1971) e (1972) em termos da anomalia verdadeira.

Considerando a Hamiltoniana F , dada pela equação (1), temos que as equações do movimento são dadas por:

$$\frac{d(\ell, g, h, \ell_2, g_2, h_2)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial (L, G, H, L_2, G_2, H_2)} \quad (4)$$

$$\frac{d(L, G, H, L_2, G_2, H_2)}{dt} = \frac{-\partial F}{\partial (\ell, g, h, \ell_2, g_2, h_2)}$$

O problema não perturbado está relacionado com a parte F_0 da Hamiltoniana e possui uma solução completa. Podemos, então, aplicar o método de Hori para analisar o sistema de equações de 1ª ordem, dado pelas equações (4).

III. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE HORI ATÉ PRIMEIRA ORDEM

Fazendo a transformação canônica:

$$(L, G, H, \ell, g, h, L_2, G_2, H_2, \ell_2, g_2, h_2) \xrightarrow{S} (L', G', H', \ell', g', h', L'_2, G'_2, H'_2, \ell'_2, g'_2, h'_2)$$

através da função geratriz S :

$$S = S_1(L', G', H', \ell', g', h', L'_2, G'_2, H'_2, \ell'_2, g'_2, h'_2)$$

onde estamos considerando apenas aproximações de primeira ordem nos pequenos parâmetros considerados.

Assim pelo Método de Hori esta transformação é tal que:

$$\begin{aligned} (L, G, H, L_2, G_2, H_2) &= (L', G', H', L'_2, G'_2, H'_2) - \frac{\partial S_1}{\partial (\ell', g', h', \ell'_2, g'_2, h'_2)} \\ (\ell, g, h, \ell_2, g_2, h_2) &= (\ell', g', h', \ell'_2, g'_2, h'_2) + \frac{\partial S_1}{\partial (L', G', H', L'_2, G'_2, H'_2)} \end{aligned} \quad (5)$$

A nova Hamiltoniana F^* é dada por

$$F^*(L', G', H', \ell', g', h', L'_2, G'_2, H'_2, \ell'_2, g'_2, h'_2) = F_0^* + F_1^* \quad (6)$$

onde F_0^* é a parte não perturbada e F_1^* é a parte perturbada da nova Hamiltoniana.

As equações do movimento são:

$$\frac{d}{dt} (L', G', H', L'_2, G'_2, H'_2) = - \frac{\partial F^*}{\partial (\ell', g', h', \ell'_2, g'_2, h'_2)} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} (\ell', g', h', \ell'_2, g'_2, h'_2) = \frac{\partial F^*}{\partial (L', G', H', L'_2, G'_2, H'_2)}$$

Uma vez integradas estas equações e conhecendo-se a função geratriz S_1 , teremos uma solução de 1ª ordem do problema em estudo.

III.1. SISTEMA AUXILIAR DO MÉTODO DE HORI

Pelo método de Hori, para o cálculo da nova Hamiltoniana F^* e da função geratriz S_1 , é necessário introduzir um parâmetro t^* através do sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d(L', G', H', L'_2, G'_2, H'_2)}{dt^*} = - \frac{\partial F_0^*}{\partial (\ell', g', h', \ell'_2, g'_2, h'_2)} \quad (8)$$

$$\frac{d(\ell', g', h', \ell'_2, g'_2, h'_2)}{dt^*} = \frac{\partial F_0^*}{\partial (L', G', H', L'_2, G'_2, H'_2)}$$

onde, t^* é o próprio tempo em aproximações de ordem zero e pelo método de Hori, temos:

$$F_0^* = - \frac{\mu^2 M_2^3}{2L'^2} + \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{C_2} - \frac{1}{2A_2} - \frac{1}{2B_2} \right] L'^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A_2} + \frac{1}{B_2} \right] G'^2 \right\} \quad (9)$$

Assim a solução do sistema de equações (8) é:

L', G', H', g', h' constantes em t^*

$$\ell' = n_\ell t^* + \ell'_0 \quad \text{com} \quad n_\ell = \frac{\mu^2 M_2^3}{L'^3}$$

e

L'_2, G'_2, H'_2, h'_2 constantes em t^*

$$\ell'_2 = n_{\ell_2} t^* + \ell'_{20} \quad \text{com} \quad n_{\ell_2} = \left[\frac{1}{C_2} - \frac{1}{2A_2} - \frac{1}{2B_2} \right] L'_2$$

$$g'_2 = n_{g_2} t^* + g'_{20} \quad \text{com} \quad n_{g_2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A_2} + \frac{1}{B_2} \right] G'_2$$

Ou seja, em aproximações de ordem zero a solução do problema é constituída pelo movimento Kepleriano e pelo movimento rotacional livre de torques externos (assumindo a diferença entre os dois momentos principais de inércia A_2 e B_2 , $A_2 \approx B_2$, como fator perturbador) do satélite artificial.

III.2. DETERMINAÇÃO DA NOVA HAMILTONIANA PERTUBADA

A parte perturbada F_1^* da nova Hamiltoniana, pelo método de Hori é dada por:

$$F_1^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_1(L', G', H', \ell', g', h', L'_2, G'_2, H'_2, \ell'_2, g'_2, h'_2) dt^*$$

onde T representa o período com relação à t^* de cada uma das parcelas que compõem F_1 .

Assim, tendo em vista a forma de F_1 dada pela equação (3) e a solução do sistema auxiliar, a média de F_1 em t^* é:

$$F_1^* = \frac{\mu^4 M_2^7}{L'^6} \left[1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{G'^2}{L'^2} \right) + \frac{15}{8} \left(1 - \frac{G'^2}{L'^2} \right)^2 \right] \cdot \left\{ - \frac{K_2 a_e^2}{2} \left(\frac{3}{2} \theta'^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(3 \frac{L'^2}{G'^2} - 1 \right) \cdot \frac{2C_2 - A_2 - B_2}{2M_2} \right. \\ \cdot \left[- \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot (1 + \theta'^2 + \theta_2'^2 - 3\theta'^2 \theta_2'^2) - \frac{3}{8} \cdot \sin 2I' \sin 2I'_2 \cdot \cos (h' - h'_2) - \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{8} \sin^2 I' \sin^2 I'_2 \cos (2h' - 2h'_2) \right] \right\} \quad (10)$$

$$\text{onde:} \quad \theta' = \cos I' = \frac{H'}{G'}$$

$$\theta_2' = \cos I'_2 = \frac{H'_2}{G'_2}$$

Observemos que este processo de média faz com que F_1^* independa das variáveis ℓ'_2 , g'_2 e ℓ' . Notemos ainda que a variável g' é cíclica em F_1^* até a 4ª potência na excentricidade e que os desenvolvimentos estão até esta ordem, pois no cálculo das novas equações do movimento para as variáveis ℓ' e g' , dados por (7), a potência na excentricidade diminuirá acarretando termos de segunda ordem na excentricidade.

III.3. DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO GERATRIZ

Pelo método de Hori, a função geratriz S_1 é dada por:

$$S_1 = \left\{ F_1(L', G', H', \ell', g', h', L'_2, G'_2, H'_2, \ell'_2, g'_2, h'_2) - F_1^*(L', G', H', h', L'_2, G'_2, H'_2, h'_2) \right\} dt^*$$

Considerando a forma de F_1 dada por (4) e de F_1^* dada por (10) e a solução do sistema auxiliar de Hori, temos que:

$$S_1 = \left(\frac{1}{B_2} - \frac{1}{A_2} \right) (G'^2 - L'^2) \cdot \frac{\sin 2\ell'_2}{8\eta_{\ell_2}} + \frac{\mu^4 M_2^7}{L'^6} \left\{ k_2 a_e^2 \cdot f_4(L', G', H', \ell', g') \right. \\ + \frac{2C_2 - A_2 - B_2}{2M_2} f_5(L', G', H', \ell', g', h', L'_2, G'_2, H'_2, \ell'_2, g'_2, h'_2) + \frac{A_2 - B_2}{4M_2} f_6(L', G', H', \\ \left. \ell', g', h', L'_2, G'_2, H'_2, \ell'_2, g'_2, h'_2) \right\} \quad (11)$$

onde f_4, f_5, f_6 são funções periódicas que contém $\ell', g', h', \ell'_2, g'_2, h'_2$ como argumento de senos e estão apresentadas na referência (1983).

III.IV. AS NOVAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Como conhecemos a nova Hamiltoniana $F^* = F_0^* + F_1^*$, as novas equações do movimento são então determinadas pelas equações (7) e dadas por:

$$\frac{dL'_2}{dt} = 0 \rightarrow L'_2 = \text{constante} \quad (12.a)$$

$$\frac{dG'_2}{dt} = 0 \rightarrow G'_2 = \text{constante} \quad (12.b)$$

$$\frac{dL'}{dt} = 0 \rightarrow L' = \text{constante} \quad (12.c)$$

$$\frac{dG'}{dt} = 0 \rightarrow G' = \text{constante} \quad (12.d)$$

$$\frac{dH'_2}{dt} = \frac{\mu^4 M_2^7}{L'^6} - \frac{2C_2 - A_2 - B_2}{2M_2} \cdot \frac{1}{2} \left(3 \frac{L'^2_2}{G'^2_2} - 1 \right) \cdot \left[1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{G'^2}{L'^2} \right) \right] \cdot \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{2} \text{Sen } 2I' \cdot \text{Sen } 2I'_2 \cdot \text{Sen}(h' - h'_2) + \text{Sen}^2 I' \cdot \text{Sen}^2 I'_2 \cdot \text{Sen}(2h' - 2h'_2) \right\} \quad (13.a)$$

$$\frac{dH'}{dt} = \frac{\mu^4 M_2^7}{L'^6} \cdot \frac{2C_2 - A_2 - B_2}{2M_2} \cdot \frac{1}{2} \left(3 \frac{L'^2_2}{G'^2_2} - 1 \right) \cdot \left[1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{G'^2}{L'^2} \right) \right] \cdot \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{2} \text{Sen } 2I' \cdot \text{Sen } 2I'_2 \cdot \text{Sen}(h' - h'_2) + \text{sen}^2 I' \cdot \text{Sen}^2 I'_2 \cdot \text{Sen}(2h' - 2h'_2) \right\} \quad (13.b)$$

$$\frac{dh'_2}{dt} = \frac{\mu^4 M_2^7}{L'^6} \cdot \frac{2C_2 - A_2 - B_2}{2M_2} \cdot \frac{3}{8} \frac{1}{G'_2} \left(3 \frac{L'^2_2}{G'^2_2} - 1 \right) \cdot \left[1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{G'^2}{L'^2} \right) \right] \cdot \left\{ \theta'_2 \left[1 - 3\theta'^2_2 + \text{sen}^2 I' \cdot \cos(2h' - 2h'_2) + \frac{\text{sen } 2I'}{\text{sen } I'_2} \cdot \cos 2I'_2 \cdot \cos(h' - h'_2) \right] \right\} \quad (13.c)$$

$$\frac{dh'}{dt} = \frac{\mu^4 M_2^7}{L'^6} \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{G'} \left[1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{G'^2}{L'^2} \right) \right] \cdot \left\{ \frac{2C_2 - A_2 - B_2}{2M_2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3L'^2_2}{G'^2_2} - 1 \right) \cdot \left\{ \theta' \left[1 - 3\theta'^2_2 + \right. \right. \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{3}{8} (1 + \theta_1'^2 + \theta_2'^2 - 3\theta_1' \theta_2') - \frac{3}{8} \sin 2I_1' \cdot \sin 2I_2' \cos (h' - h_2') - \frac{3}{8} \sin^2 I_1' \cdot \sin^2 I_2' \cos (2h' - \\ & - h_2') \end{aligned} \right\} \quad (14.a)$$

$$\left. \begin{aligned} & \theta_1'^2 + \theta_2'^2 - 3\theta_1'^2 \theta_2'^2 - \frac{3}{8} \sin 2I_1' \cdot \sin 2I_2' \cos(h_1' - h_2') - \frac{3}{8} \cdot \sin^2 I_1' \cdot \sin^2 I_2' \cdot \cos(2h_1' - \\ & 2h_2') \Bigg\} - \frac{K a^2 e}{2} \left(\frac{3}{2} \theta_1'^2 - \frac{1}{2} \right) \Bigg\} \end{aligned} \quad (14.b)$$

$$\frac{dg_2'}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_2} + \frac{1}{B_2} \right) G_2' + \frac{\mu^4 M_2^7}{L'^6} \cdot \frac{2C_2 - A_2 - B_2}{2M_2} \cdot \frac{1}{G_2'} \cdot \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{G_2'^2}{L'^2} \right) \right] \cdot \left\{ 3 \cdot \frac{L_2'^2}{G_2'^2} \right.$$

$$\left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} (1 + \theta'^2 + \theta_2'^2 - 3\theta'^2 \theta_2'^2) - \frac{3}{8} \sin 2I' \cdot \sin 2I_2' \cdot \cos(h' - h_2') - \frac{3}{8} \sin^2 I' \sin^2 I_2' \cdot \right.$$

$$\left. \cos(2h' - 2h_2') \right] - \frac{3}{8} \theta_2' \left(\frac{3L_2'^2}{G_2'^2} - 1 \right) \cdot \left[\theta_2' (1 - 3\theta'^2 + \sin^2 I' \cdot \cos(2h' - 2h_2')) + \frac{\sin 2I'}{\sin I_2'} \cdot \right.$$

$$\left. \left. \cos 2I_2' \cdot \cos(h' - h_2') \right] \right\} \quad (14.c)$$

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System

$$\theta_1'^2 - 3\theta_2'^2 \cdot \theta_2'^2) - \frac{3}{4} \sin 2I' \sin 2I_2' \cos(h' - h_2') - \frac{3}{4} \sin^2 I' \sin I_2' \cdot \cos(2h' - 2h_2') + \frac{1}{2} \theta' \\ \left\{ \theta' \cdot (1 - 3\theta_2'^2 + \sin^2 I_2' \cdot \cos(2h' - 2h_2')) + \frac{\cos 2I'}{\sin I'} \sin 2I_2' \cos(h' - h_2') \right\} + k_2 a_e^2 \left(\frac{1}{2} - \right. \\ \left. - \frac{5}{2} \theta'^2 \right) \} \quad (14.d)$$

onde os termos acima de 2.^a ordem na excentricidade já foram desprezados, devido a hipóteses adotados.

Das equações (13.a) e (13.b) temos que:

$$\frac{dH_2'}{dt} + \frac{dH'}{dt} = 0$$

ou seja: $H_2' + H' = K_z = \text{constante.}$

O fato de que a soma das componentes no eixo inercial z dos momentos angulares de rotação H_2' e de translação H' , ser constante, traduz a conservação do momento angular total do problema, visto que a Terra e o Satélite não experimentam nenhuma outra força além da atração gravitacional mútua. Desta forma, K_z representa a componente do momento angular total no eixo inercial z, em termos das novas variáveis.

Observamos também que os segundos membros das equações (14) sempre envolvem as variáveis h, h_2', H' e H_2' . Portanto é necessário primeiro obter a solução para as equações (13) e depois obter a solução para as demais variáveis.

Como o momento angular total, é conservado, podemos utilizar além da constante K_z , dada em (15), também as componentes K_x e K_y do momento angular total respectivamente nos eixos x e y. Estas três constantes K_x, K_y e K_z nos dão mais três integrais primeiras do problema aqui em estudo. Como as equações (13) formam um sistema de equações diferenciais de 1.^a ordem, com 2 graus de liberdade e 4 variáveis independentes, que são H', H_2', h' e h_2' , com o auxílio dessas três integrais podemos eliminar 3 das variáveis anteriores doeste sistema.

Se os componentes do momento angular total G no sistema inercial são:

$$G = K_x \hat{e}_x + K_y \hat{e}_y + K_z \hat{e}_z \quad (16)$$

Sendo:

$$K_x = G' \sin I' \cdot \sin h' + G_2' \cdot \sin I' \cdot \sin h_2' \quad (17.a)$$

$$- K_y = G' \sin I' \cos h' + G_2' \cdot \sin I_2' \cos h_2' \quad (17.b)$$

$$K_z = G' \cos I' + G_2' \cos I_2' = H' + H_2' \quad (17.c)$$

Utilizando as relações (17) e fazendo algumas manipulações algébricas na equação (13.a), obtemos:

$$\frac{dH_2}{dt} = \pm (aH_2'^2 + bH_2' + c)^{1/2} u \quad (18)$$

onde:

$$a = -4 \frac{G^2}{G_2'^2}$$

$$b^4 = \frac{K_z}{G_2^2} (G^2 + G_2'^2 - G'^2)$$

$$c = 4 (K_x^2 + K_y^2) - \left(\frac{G^2 + G_2'^2 - G'^2}{G_2'} \right)^2$$

$$u = \frac{3}{8} \frac{\beta}{G_2'^2} \frac{G^2 - G_2'^2 - G'^2}{G_2'}$$

$$\beta = \frac{\mu^4 \cdot M^7}{L'^6} \left(1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{G_2'^2}{L'^3} \right) \right) \frac{1}{2} \left(3 \frac{L_2'^2}{G_2'^2} - 1 \right) \frac{2C_2 - A_2 - B_2}{2M_2}$$

e o sinal $\pm$ depende das condições iniciais do problema e é determinado por:

$$2 \sin I_2' (K_x \cos h_2' + K_y \sin h_2') = \pm (a H_2'^2 + b H_2' + c)^{1/2} \quad (19)$$

A solução geral para a equação (18), quando $a < 0$, $b^2 < 4ac$ e $|2aH_2' + b| < (b^2 - 4ac)^{1/2}$ (condições estas que são válidas para a, b, c e u não nulos, e estão comprovados na referência (1983)) é dada por:

$$H_2' = b_1 \sin(a_1 t + w_1) + c_1 \quad (20)$$

onde:

$$a_1 = \pm (-u) \cdot (-a)^{1/2} \quad (20.a)$$

$$b_1 = (b^2 - 4ac)^{1/2} / 2a \quad (20.b)$$

$$c_1 = -\frac{b}{2a} \quad (20.c)$$

$$w_1 = \arcsin \frac{2a H_2'^0 + b}{(b^2 - 4ac)^{1/2}} \pm (-a)^{1/2} u t_0 \quad (20.d)$$

sendo o sinal $\pm$ também determinado pelas condições iniciais e pela eq. (19).

Logo a componente do momento angular de rotação no eixo inercial z , H_2' , é Periódica e pela equação (15) temos que o componente do momento angular de translação no eixo z , H_1' , teria a mesma solução de H_2' , a menos da constante K_z .

Para as demais equações (13) e (14) se utilizarmos as integrais primeira K_x , K_y , K_z , dados pelas relações (17), e fazendo algumas manipulação algébricas obtemos equações do tipo:

$$\frac{dx}{dt} = f_x(H_2') \quad (21)$$

sendo x a variável envolvida em cada caso, ou seja,

$$h', h_2', \ell', \ell_2', g' \text{ ou } g_2'$$

Como a solução de H_2' é conhecida em função do tempo, então para cada variável, teríamos uma equação do tipo (21), que pode ser integrada. As equações explícitas para cada variável, são apresentadas e analisadas na referência (1983). Aqui apresentamos apenas a solução encontrada para cada variável, que são:

$$h_2' = a_2 t + c_2 \arctg \frac{r_2 \arctg \left(\frac{a_1 t + w_1}{2} \right) + 1}{(r_2^2 - 1)^{1/2}} + d_2 \arctg$$

$$\frac{r_1 \operatorname{tg} \left(\frac{a_1 t + w}{2} \right) + 1}{(r_1^2 - 1)^{1/2}} + h'_{21}$$

$$r_2 = \frac{c_1 + G'_2}{-b_1}$$

$$r_3 = \frac{c_1 - K_z - G'_1}{-b_1}$$

$$r_4 = \frac{c_1 - K_z + G'_1}{-b_1}$$

a_1, b_1, c_1 São dados em (20)

$a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, h'_{21}, h'_1, \ell'_{21}, \ell'_1, g'_{21}, g'_1$ com $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, são constantes e suas expressões são apresentadas na referência (1983).

É importante salientar que $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, h'_{21}, \ell'_{21}, g'_{21}$, $i = 2, 4, 6$ não dependem dos termos envolvendo o achatamento da Terra, ou seja, envolvendo o parâmetro K_2 .

III.5. SOLUÇÃO FINAL DE PRIMEIRA ORDEM PARA O DE EQ. DIF. INICIAIS.

A solução de primeira ordem para o sistema de equações diferenciais dados por (4) é obtida a partir das equações (5).

Como a função geratriz S , dada pela equação (11), é periódica nas variáveis $\ell', g', h', \ell'_2, g'_2, h'_2$, as derivadas parciais em relação as variáveis $L', G', H', \ell', g', h', L'_2, G'_2, H'_2, \ell'_2, g'_2$ e h'_2 , que aparecem nas equações (15), também serão periódicas. Estas derivadas são simples, mas muito laboriosas e não foram calculadas.

Desta maneira, a solução final de 1ª ordem do nosso problema executará pequenas oscilações na vizinhança das soluções apresentadas no item (3.4).

IV. CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi dar uma forma de abordagem para o tratamento do movimento de satélites artificiais da Terra, onde os termos de acoplamento entre movimento rotacional e translacional são considerados, apesar da sua pequena ordem de grandeza. Consideramos também a influência do Satélite desiguais, sendo dois deles muito próximos. Não admitimos comensurabilidades entre as frequências dos movimentos e singularidades nas equações.

Com o auxílio do método de Hori (1966) e utilizando a conservação do momento angular total, as equações do movimento do nosso problema puderam ser integrados, em primeira ordem, e podemos concluir que os termos de acoplamento rotação-translação e o achatamento da Terra influenciam o movimento rotacional e translacional do satélite artificial do seguinte modo:

- o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita, assim como o módulo do momento angular de rotação e a componente do momento angular de rotação no eixo de momento de inércia C do satélite sofrem variações periódicas;
- o equador do satélite (plano $A_2O_2B_2$) tem movimento de precessão e nutação em relação a um eixo x' , que se situa na intersecção do plano perpendicular ao momento angular de rotação com o equador da Terra;
- o plano perpendicular ao momento angular de rotação possui uma precessão e uma nutação em rela

ção ao eixo inercial x e uma nutação em relação ao plano do equador da Terra;

- o plano da órbita tem uma precessão e uma nutação em relação ao eixo inercial x , assim como o argumento do perigeu possui nutação e precessão em relação a linha dos nodos;

- a anomalia média possui variações periódicas e seculares.

É importante salientar que o achatamento da Terra só causa variação periódicas nas variáveis de Andoyer, que correspondem as variáveis angulares.

V. APÊNDICE

Apresentaremos aqui as variáveis de Delaunay e as variáveis de Andoyer, que estão relacionadas respectivamente com o movimento translacional e rotacional do satélite artificial e foram utilizadas neste trabalho.

VARIÁVEIS DE DELAUNAY

G = Módulo do momento angular de translação = $\mu a (1 - e^2)$

H = Componente do momento angular de translação no eixo inercial $z = G \cos I$

$L = \mu a$

ℓ = Anomalia média

g = Argumento do perigeu da órbita

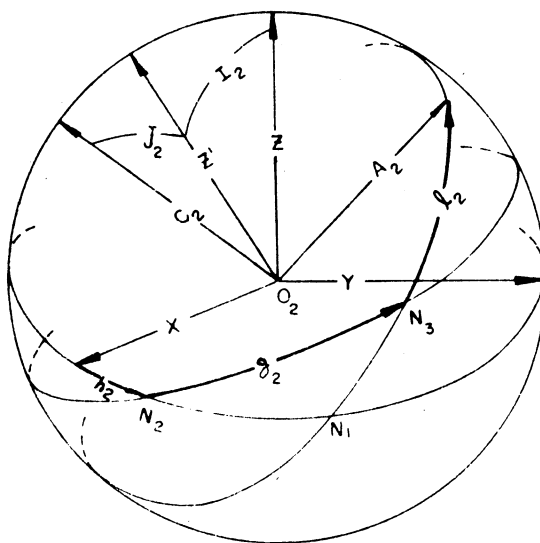
h = Longitude do nodo ascendente da órbita

I = Inclinação do plano da órbita

a = Semi-eixo da órbita

e = Excentricidade da órbita

VARIÁVEIS DE ANDOYER



G_2 = módulo do momento angular de rotação

H_2 = Componente do momento angular de rotação no eixo inercial $z = G_2 \cos I_2$

L_2 = Componente do momento angular de rotação no eixo de momento de inercial
 $C_2 = G_2 \cos J_2$

h_2 = Ângulo entre o eixo x e O_2N_2

g_2 = Ângulo entre O_2N_2 e O_2N_3

ℓ_2 = Ângulo entre O_2N_3 e o eixo A_2 .

I_2 = Inclinação entre o plano perpendicular ao momento angular de rotação do satélite e o plano do equador da Terra.

J_2 = Inclinação entre o plano do equador do satélite ($A_2O_2B_2$) e o plano perpendicular ao momento angular de rotação do satélite.

BIBLIOGRAFIA

Hori, G. 1966, *Pub. Astron. Soc. Japan* 18, 287.

Hori, G. 1971, in *IAU Symposium No 48, Rotation of the Earth*, p. 244. (held in Morioka, Japan; Dordrecht-Holland, Reidel).

Kinoshita, H. 1972, *Pub. Astron. Soc. Japan* 24, 423.

Zanardi, M.C. 1983, *Movimento Translacional-Rotacional, Acoplado, de Satélites Artificiais*, Tese de Mestrado pelo ITA-São José dos Campos, São Paulo.

Maria Cecília Zanardi: Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA-CTA, Departamento de Astronomia, 12.200 São José dos Campos, S.P. Brasil.