1985RMxAA..11...23R

Rev. Mexicana Astron. Astrof., **11**, 23-34 (1985)

SUPERPOSICION DE SISTEMAS ESTELARES[1]

Rosa Ma. Ros

Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos
Universidad de Barcelona
España

Received 1984 August 16

RESUMEN

El trabajo presenta un modelo que explica el comportamiento cinemático del entorno solar como superposición de dos sistemas de estrellas, que se identifican con las conocidas poblaciones estelares I y II. Para distintas muestras próximas al sol se calculan los parámetros más representativos, los cuales corroboran los actuales conocimientos sobre la estructura galáctica.

Es importante remarcar que la superposición de dos sencillas funciones de distribución de Schwarzschild, considerando momentos hasta el cuarto orden, explica satisfactoriamente la observada distribución de las velocidades residuales de las estrellas en el entorno del sol.

ABSTRACT

The work presents a model which explains the kinematic behavior of the solar surrounding as a superposition of two stellar systems, which are identified with the well known stellar populations I and II. The most representative parameters are calculated for the several samples in the solar neighborhood, and they support our present knowledge about the galactic structure.

It is important to emphasize that the superposition of two simple Schwarzschild distribution functions explain satisfactorily the distribution of the residual speed of the stars observed in the solar surroundings, taking into account moments as far as the fourth order.

Key words: GALACTIC STRUCTURE – STELLAR DYNAMICS

I. INTRODUCCION

Todas las funciones de distribución propuestas para describir el comportamiento de las estrellas del entorno solar son, básicamente, funciones cuadráticas en las velocidades residuales, lo cual implica la anulación de todos los momentos centrados de orden impar. Si bien hasta hace unos años solían considerarse únicamente los momentos centrados de segundo orden, Erickson (1975) publicó, por primera vez, momentos centrados hasta el cuarto orden, para una selección de estrellas extraídas del catálogo de Gliese (1969), y puso de manifiesto el hecho de que, en adelante, ya no podían justificarse hipótesis que implicasen momentos impares nulos. Estas consideraciones nos obligan a confeccionar nuevos modelos que expliquen mejor nuestro entorno, constituyendo este trabajo la construcción de uno de éllos mediante la superposición de dos funciones de distribución. Sus antecedentes son debidos a diversos autores; en particular, Chandrasekhar (1942) sugiere en dos dimensiones una superposición de dos sistemas, que identifica con las poblaciones estelares I y II. Posteriormente, Einasto (1954) considera la superposición de dos grupos cinemáticamente distintos, trabajando sólo con momentos de orden dos, e Iwanowska (1966), efectuando sucesivas aproximaciones, introduce una función de distribución suma de dos funciones de Schwarzschild. En este trabajo estudiaremos la superposición de dos funciones de distribución, como dicha autora, pero introduciendo además los momentos centrados hasta cuarto orden para poder matizar más aún.

En primer lugar introducimos un potencial estacionario, a simetría cilíndrica y separable, que nos lleva a considerar una función de distribución, cuyos momentos centrados no nulos son los mismos que obtuvo Erickson y calculamos nosotros para las distintas muestras.

En segundo lugar consideramos el principio de superposición propiamente dicho. Siguiendo a Chandrasekhar (1942), tomamos la función de distribución que describe el sistema estelar como suma de dos funciones del mismo tipo. En particular adoptamos dos funciones de Schwarzschild que son las que dan la teoría del cálculo de probabilidades. Las fórmulas que entonces deducimos nos permiten explicar la presencia de todos los momentos que da la observación, aunque ambas funciones de distribución parciales carezcan de momentos de orden impar. Estas fórmulas son las que nos permitirán comprobar los resultados obtenidos por los colaboradores de Iwanowska (1979), en particular por Glebocki (1967).

Atendiendo a los objetivos de comprobar resultados y obtener otros nuevos, confeccionamos distintas muestras y calculamos sus momentos. Las muestras 1 y 2 servirán para controlar nuestros resultados y comprobar los de

1. Una versión abreviada de la tesis doctoral, Universidad de Barcelona, España.

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1985RMxAA..11...23R

Glebocki. Las muestras 3 y 4 permitirán estudiar la variación de ciertos parámetros en el entorno solar.

En el último apartado aplicamos las fórmulas de superposición y comprobamos que para todas las muestras consideradas dichas fórmulas se satisfacen dentro de los márgenes de error de los momentos y deducimos los intervalos de variación de los parámetros más representativos de cada muestra, parámetros que corroboran los actuales conocimientos de la estructura galáctica, lo que permite concluir la bondad del método utilizado.

II. MODELOS GALACTICOS

Sabido es que para estudiar la distribución de las velocidades de las estrellas próximas al sol se utiliza su función de distribución y sus momentos centrados.

Consideremos la muestra de estrellas como un conjunto estadístico al que aplicamos el teorema fundamental de la mecánica estadística. Suponemos además que dicho conjunto constituye un sistema conservativo, sin pasos ni colisiones, donde las fuerzas que rigen el movimiento de las estrellas son únicamente de carácter gravitatorio, es decir, debidas a un potencial función del tiempo y la posición. Tenemos, por tanto, en el espacio fásico, la ecuación fundamental de la dinámica estelar;

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla_r f + \dot{\boldsymbol{V}} \cdot \nabla_V f = 0 \quad , \qquad (1)$$

siendo $f(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{V})$ la función de distribución, y donde:

$$\dot{\boldsymbol{V}} = - \nabla_r U \quad ,$$

En un sistema de coordenadas cilíndricas que gire con velocidad Θ alrededor del eje de simetría z, expresamos:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \varpi \\ \theta \\ z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Theta \\ Z \end{bmatrix}$$

El conocimiento que tenemos del sistema galáctico, nos permite adoptar un potencial cuyas características son las siguientes:

- es estacionario: $\partial U/\partial t = 0$
- posee simetría cilíndrica: $\partial U/\partial \theta = 0$
- es separable en ϖ y z: $U(\varpi,z) = U_1(\varpi) + U_2(z)$.

La primera hipótesis se justifica pues en cortos intervalos de tiempo la forma de la galaxia no varía apreciablemente. La segunda al interpretarse los brazos espirales como acumulación de estrellas brillantes, lo cual no excluye la distribución a simetría cilíndrica. Y la tercera por estar el sol bastante alejado del centro galáctico y en cambio muy cercano al plano galáctico; en un entorno del mismo así, el potencial depende básicamente de dos conceptos: primero de la masa central y es función de ω y, en segundo lugar, de la distancia z a que nos encontramos del plano galáctico. En consecuencia obtenemos tres integrales primeras al considerar cada una de estas hipótesis.

Al mantenernos en el entorno solar, consideramos el vector posición $\boldsymbol{r}$ de las estrellas con respecto al centro galáctico el mismo para todas éllas, dado que el espacio en que se encuentran ocupa un pequeño volumen en comparación con la distancia al centro de la galaxia. Como que además, estamos suponiendo el sistema estacionario, en un entorno solar t y $\boldsymbol{r}$ pueden tomarse constantes. A partir de ahora, mientras no digamos lo contrario, consideraremos fijas las coordenadas temporales y espaciales que aparezcan.

Si no imponemos al potencial más condiciones que las señaladas más arriba, la función de distribución será de la forma (véase p.e. Chandrasekhar 1942):

$$f = F(\Pi^2 + \Theta^2, \varpi\Theta, Z^2) \quad , \qquad (2)$$

al ser esta función par en Π y en Z, la velocidad del centroide sólo tendrá componente rotacional Θ_0, al ser nulas las otras componentes Π_0 y Z_0. Con objeto de simplificar las expresiones posteriores, haremos:

$$\tilde{\theta} = \Theta - \Theta_0 \quad , \qquad (3)$$

siendo entonces la velocidad residual $\boldsymbol{u}$ de cada estrella, en la base cilíndrica:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \Pi \\ \tilde{\theta} \\ Z \end{bmatrix} \quad ,$$

En estas variables los momentos centrados de orden n, pueden expresarse como los tensores de orden n:

$$\mu_{pqr} = \frac{1}{N} \int_V \Pi^p \, \tilde{\theta}^q \, Z^r \, f \, dV \qquad (4)$$

con $p + q + r = n$.

Para funciones de la forma (2), pares en Π y en Z, debido a la simetría del espacio de las velocidades, además del $\mu_{000} = 1$, los sucesivos momentos μ_{pqr} (4) sólo serán distintos de cero cuando p y r sean pares, a saber:

$$\left.\begin{matrix} \mu_{200} & \mu_{020} & \mu_{002} & \mu_{210} & \mu_{030} & \mu_{012} \\ \mu_{400} & \mu_{220} & \mu_{202} & \mu_{040} & \mu_{022} & \mu_{004} \end{matrix}\right\} . \qquad (5)$$

Como veremos más adelante, hasta cuarto orden, (5) son los únicos momentos no nulos que aparecen al considerar diversas muestras estelares del entorno solar.

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1985RMxAA..11...23R

Cuando la función (2) se reduce a una distribución normal en las tres variables o de Schwarzschild:

$$f = e^{-1/2(a\Pi^2 + b\tilde{\theta}^2 + cz^2)} \quad , \qquad (6)$$

evidentemente, los momentos centrados de orden impar serán nulos y los momentos centrados de cuarto orden pueden obtenerse en función de los de segundo orden (Orús 1977):

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_{400} = 3\,\mu_{200}^2 & \mu_{220} = \mu_{200}\,\mu_{020} \\ \mu_{202} = \mu_{200}\,\mu_{002} & \mu_{040} = 3\,\mu_{020}^2 \\ \mu_{004} = 3\,\mu_{002}^2 & \mu_{022} = \mu_{020}\,\mu_{002} \end{array}\right\} \quad . \qquad (7)$$

La función de distribución (2) explicaría la presencia de los momentos centrados (5), que son los que suelen aparecer al estudiar distintas muestras del entorno solar. Como dicha función no responde a las distribuciones normales, se intenta compaginar la presencia de tales momentos (5) con la existencia de funciones de distribución de Schwarzschild (6), que son las que dan la teoría del cálculo de probabilidades. Supondremos entonces, el conjunto estelar como una superposición de dos poblaciones, cada una de las cuales siguiendo una distribución normal, pudiendo así justificarse a partir de funciones de distribución (6) la no nulidad de todos los momentos (5), incluidos los de orden impar.

III. SUPERPOSICION DE SISTEMAS ESTELARES

Nos proponemos estudiar ahora el principio de superposición en los sistemas estelares. Consideramos el sistema estelar constituido por dos subconjuntos, para cada uno de los cuales son válidas las hipótesis formuladas en el apartado anterior, es decir, los sistemas son conservativos, sin pasos ni colisiones, y las fuerzas que rigen el movimiento de las estrellas derivan de un potencial gravitatorio.

Si llamamos ψ' y ψ'' a las respectivas funciones de distribución de ambos subsistemas y f a la totalidad del sistema estelar, tenemos (Chandrasekhar 1942):

$$f = \psi' + \psi'' \quad , \qquad (8)$$

donde gracias a las hipótesis adoptadas, tanto ψ' como ψ'' verifican la ecuación fundamental (1). Si ψ' y ψ'' son dos soluciones de dicha ecuación, lineal y homogenea, según (8) también f será solución de (1).

Como que los dos subconjuntos se encuentran entremezclados, es evidente que en cada subsistema los movimientos de las estrellas vienen regidos por el mismo potencial gravitatorio. Según se ha especificado en el primer apartado, suponemos el sistema estelar estacionario, a simetría cilíndrica y regido por un potencial separable lo cual, nos lleva a admitir que las funciones ψ' y ψ'' son de tipo (2). En particular, adoptaremos unas funciones ψ' y ψ'' del tipo de Schwarzschild y, por tanto, según (8), también f será una función del tipo (2). Luego, tanto para las distribuciones parciales como para la distribución total, la velocidad de los centroides sólo tiene componente rotacional, verificándose:

$$N\,\Theta_0 = N'\,\Theta_0' + N''\,\Theta_0'' \qquad (9)$$

y siendo nulas $\Pi_0, \Pi_0', \Pi_0'', Z_0, Z_0'$ y Z_0''.

En adelante consideraremos que las funciones de distribución ψ' y ψ'' de los dos subsistemas son de la forma (6), con lo cual para ambos subconjuntos se cumplirá (7) con primas y con segundas. Así mismo los momentos de orden impar de las distribuciones parciales son nulos, mientras que los momentos impares de la función de distribución total f no lo son.

Para simplificar los desarrollos introducimos los tantos por uno de estrellas de los conjuntos parciales y la diferencia D entre las velocidades de los centroides de ambos subconjuntos:

$$n' = N'/N \qquad n'' = N''/N \qquad (10)$$

$$D = \Theta_0' - \Theta_0'' \quad . \qquad (11)$$

Según (8) los momentos μ_{pqr} (4) pueden expresarse en función de Θ_0', Θ_0'' y los momentos parciales sin más que considerar (10) y (11):

$$\mu_{pqr} = \sum_{m=0}^{q} (-D)^m \binom{q}{m} \Big[n'\,n''^m\,\mu'_{pmr} + (-n')^m\,n''\,\mu''_{pmr} \Big] \qquad (12)$$

con $p + q + r = n$. Los momentos de orden n tienen $(n + 2/n)$ componentes. Al considerarlas para $n \leqslant 4$ tendremos treinta y cinco ecuaciones de la forma (12), donde aparecen veintiuna incógnitas: n', n'', D y los dieciocho momentos parciales para $n = 2$ y $n = 4$ cuyos índices coinciden con los de (5), pues para $n = 3$ son nulos al estar suponiendo ψ' y ψ'' del tipo (6).

A continuación vamos a efectuar un cambio de notación en los momentos centrados, usando unos nuevos índices que nos resultarán más cómodos en los desarrollos ulteriores. Pasamos de la forma pqr del tensor de orden n $(p + q + r = n)$ a la forma ijkln)..., donde cada índice puede significar ϖ, θ ó z según sea la primera, la segunda ó la tercera componente, es decir:

$$\mu_{pqr} = \mu_{\varpi\varpi \overset{p)}{\ldots} \varpi\theta\theta \overset{q)}{\ldots} \theta zz \overset{r)}{\ldots} z}$$

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1985RMxAA..11...23R

Con esta notación, según (5), además del momento de orden cero, los momentos de orden n (n = 2,3,4) son los que tienen por índices:

$$\left.\begin{array}{llllll} \varpi\varpi & \theta\theta & zz & \varpi\varpi\theta & \theta\theta\theta & \theta zz \\ \varpi\varpi\varpi\varpi & \varpi\varpi\theta\theta & \varpi\varpi z & \theta\theta\theta\theta & \theta\theta zz & zzzz \end{array}\right\} . \qquad (13)$$

Así mismo, la función f definida en (8), evidentemente, es de la forma (2) y, por tanto, de las treinta y cinco ecuaciones (12) previstas sólo trece tienen los primeros miembros no nulos (aquellos que presentan los mismos índices que (13)). Se comprueba fácilmente que las veintidós ecuaciones restantes son idénticamente nulas. Considerando las expresiones (7) en (12) disponemos del sistema de trece ecuaciones:

$$1 = n' + n'' \qquad (14)$$

$$\mu_{\varpi\varpi} = n'\mu'_{\varpi\varpi} + n''\mu''_{\varpi\varpi} \qquad (15)$$

$$\mu_{\theta\theta} - Y = n'\mu'_{\theta\theta\theta} + n''\mu''_{\theta\theta} \qquad (16)$$

$$\mu_{zz} = n'\mu'_{zz} + n''\mu''_{zz} \qquad (17)$$

$$\mu_{\varpi\varpi\theta} = Z(\mu'_{\varpi\varpi} - \mu''_{\varpi\varpi})\ \mu''_{\varpi\varpi}) \qquad (18)$$

$$\mu_{\theta\theta\theta} - XY = 3Z\,(\mu'_{\theta\theta} - \mu''_{\theta\theta}) \qquad (19)$$

$$\mu_{zzz} = Z(\mu'_{zz} - \mu''_{zz}) \qquad (20)$$

$$\mu_{\varpi\varpi\varpi\varpi} = 3n'\mu'^2_{\varpi\varpi} + 3n''\mu''^2_{\varpi\varpi} \qquad (21)$$

$$\mu_{\varpi\varpi\theta\theta} = n'\mu'_{\varpi\varpi}\ \mu'_{\theta\theta} + n''\mu''_{\varpi\varpi}\ \mu''_{\theta\theta} + $$
$$+ Y(n''\mu'_{\varpi\varpi} + n'\mu''_{\varpi\varpi}) \qquad (22)$$

$$\mu_{\varpi\varpi zz} = n'\mu'_{\varpi\varpi}\ \mu'_{zz} + n''\mu''_{\varpi\varpi}\ \mu''_{zz} \qquad (23)$$

$$\mu_{\theta\theta\theta\theta} - Y(X^2 + Y) = 3n'\mu'^2_{\theta\theta} + 3n''\mu''^2_{\theta\theta} + $$
$$+ 6Y(n''\mu'_{\theta\theta} + n'\mu''_{\theta\theta}) \qquad (24)$$

$$\mu_{\theta\theta zz} = n'\mu'_{\theta\theta}\ \mu'_{zz} + n''\mu''_{\theta\theta}\ \mu''_{zz} + $$
$$+ Y(n''\mu'_{zz} + n'\mu''_{zz}) \qquad (25)$$

$$\mu_{zzzz} = 3n'\mu'^2_{zz} + 3n''\mu''^2_{zz} \quad . \qquad (26)$$

Para simplificar al máximo este sistema hemos adoptado las nuevas variables auxiliares no independientes:

$$\begin{aligned} X &= (n'' - n')D \\ Y &= n'\,n''\,D^2 \\ Z &= n'\,n''\,D \end{aligned} \qquad (27)$$

Disponemos pues de un sistema de trece ecuaciones, desde (14) a (26). En la aplicación de estas relaciones a diversas muestras, para nosotros serán datos los doce momentos centrales totales (13) y quedarán como incógnitas n', n'', D (ó bién X,Y,Z) y los seis momentos parciales de segundo orden; en total, nueve incógnitas.

Para hacer más manejable el sistema para el tratamiento numérico de modelos particulares, introduzcamos los nuevos parámetros:

$$\rho_1 = \frac{(1/3)\mu_{\varpi\varpi\varpi\varpi}}{\mu^2_{\varpi\varpi}} \qquad (28)$$

$$\rho_2 = \frac{\mu_{\varpi\varpi zz}}{\mu_{\varpi\varpi}\ \mu_{zz}} \qquad (29)$$

$$\rho_3 = \frac{(1/3)\mu_{zzzz}}{\mu^2_{zz}} \qquad (30)$$

$$\rho_4 = \frac{\mu_{\varpi\varpi\theta\theta}}{\mu_{\varpi\varpi}\ \mu_{\theta\theta}} \qquad (31)$$

$$\rho_5 = \frac{(1/3)\mu_{\theta\theta\theta\theta}}{\mu^2_{\theta\theta}} \qquad (32)$$

$$\rho_6 = \frac{\mu_{\theta\theta zz}}{\mu_{\theta\theta}\ \mu_{zz}} \qquad (33)$$

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1985RMxAA..11...23R

Introduciendo, además, las variables auxiliares:

$$\rho_5 = \frac{(1/3)\mu_{\theta\theta\theta\theta} + (2/3)\ YD^2\ (n''^2 - n'\,n'' + n'^2)}{\mu_{\theta\theta}^2} \tag{34}$$

$$q = n'/n'' \tag{35}$$

$$\chi = \frac{3}{2}(\bar{\rho}_5 - \rho_5)\ \left(\frac{\mu_{\theta\theta}}{Y}\right)^2 \tag{36}$$

y recordando la expresión (32) junto a estas tres últimas (34), (35) y (36), deducimos la ecuación:

$$q^2 - (1 + \chi)\,q + 1 = 0 \tag{37}$$

cuya solución mayor que uno, al adoptar $n' > n''$ (como detallamos más adelante), viene dada por la relación:

$$q = \frac{1 + \chi + [(1 + \chi)^2 - 4]^{1/2}}{2}$$

Para que q sea real, es evidente que χ ha de ser necesariamente mayor ó igual que la unidad. Una vez conocida q, según (14), (27) y (35), podemos calcular:

$$n' = q/(1 + q) \qquad n'' = 1/(1 + q) \tag{38}$$

$$D = \left(\frac{Y}{q}\right)^{1/2}(1 + q)\quad . \tag{39}$$

Volviendo a las fórmulas (28) a (33), de las ecuaciones correspondientes a los momentos de segundo y cuarto orden del sistema (14) a (26), deducimos las expresiones fundamentales:

$$\left.\begin{aligned}
(\rho_1 - 1)(\rho_3 - 1) &= (\rho_2 - 1)^2 \\
\frac{\rho_4 - 1}{\rho_6 - 1} &= \frac{(\rho_1 - 1)^{1/2}}{(\rho_3 - 1)^{1/2}} \\
\bar{\rho}_5 - 1 = \frac{(\rho_4 - 1)^2}{\rho_1 - 1} &= \frac{(\rho_6 - 1)^2}{\rho_3 - 1}
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

que usaremos a veces como ligaduras y que en otras ocasiones, a través de (28) a (33), nos servirán para delimitar alguno de los momentos de cuarto orden que intervienen en ellas, y los momentos parciales de segundo orden correspondientes a cada subsistema:

$$\left.\begin{aligned}
\mu'_{\varpi\varpi} &= \mu_{\varpi\varpi}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{q}}\ (\rho_1 - 1)^{1/2}\right] \\
\mu''_{\varpi\varpi} &= \mu_{\varpi\varpi}\left[1 + \sqrt{q}\ (\rho_1 - 1)^{1/2}\right] \\
\mu'_{\theta\theta} &= \mu_{\theta\theta}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{q}}\ (\bar{\rho}_5 - 1)^{1/2}\right] - n''^2\,D^2 \\
\mu''_{\theta\theta} &= \mu_{\theta\theta}\left[1 + \sqrt{q}\ (\bar{\rho}_5 - 1)^{1/2}\right] - n'^2\,D^2 \\
\mu'_{zz} &= \mu_{zz}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{q}}\ (\rho_3 - 1)^{1/2}\right] \\
\mu''_{zz} &= \mu_{zz}\left[1 + \sqrt{q}\ (\rho_3 - 1)^{1/2}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

En el último apartado, al aplicar estas expresiones, las segundas corresponden a las estrellas de alta velocidad. Se cumple entonces que los momentos y las velocidades residuales típicas en segundas son mayores que los que llevan primas y, por tal motivo, en las fórmulas (41) ya hemos tomado de las dos determinaciones de la raiz la conveniente en este sentido.

Finalmente de las ecuaciones relativas a los momentos de tercer orden (18), (19) y (20), sustituyendo (41), obtenemos:

$$-\sqrt{Y} = \frac{\mu_{\varpi\varpi\theta}}{\mu_{\varpi\varpi}(\rho - 1)^{1/2}} = \frac{\mu_{\theta zz}}{\mu_{zz}(\rho_3 - 1)^{1/2}} \tag{42}$$

$$-\sqrt{Y} = \frac{\mu_{\theta\theta\theta} + 2n'\,n''\,(n'' - n')\,D^3}{3\,\mu_{\theta\theta}\,(\bar{\rho}_5 - 1)^{1/2}}\quad . \tag{43}$$

En general, a partir de los momentos conocidos, calcularemos ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, y ρ_6 mediante (28), (29), (30), (31) y (33), debiendo cumplirse las ligaduras (40), lo cual también nos servirá para calcular $\bar{\rho}_5$. Introduciendo ρ_1, ρ_3 y los momentos totales como datos, de (42) podemos calcular Y y establecer una cierta relación entre ambos momentos impares, dando lugar a una mejor determinación de los mismos.

La última condición de cierre de que disponemos (43), al sustituir todos los valores que hemos obtenido anteriormente, nos permitirán deducir el valor de $\mu_{\theta\theta\theta}$ y observar si éste concuerda o no con el conocido.

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1985RMxAA..11...23R

IV. MUESTRAS Y MOMENTOS CENTRADOS

A continuación procedemos a la confección de varias muestras así como al cálculo de sus momentos para introducirlos como datos en las fórmulas de la superposición obtenidas al final del apartado anterior.

a) *Catálogos y Muestras*

Las muestras deben estar formadas por estrellas próximas al sol (U separable) y con los datos suficientes para calcular sus momentos e interpretar los momentos obtenidos. Nos interesa conocer para cada estrella: la velocidad y la distancia heliocéntrica, el tipo espectral y la clase de luminosidad, ó aquellos parámetros que nos permitan deducir éstos. Es evidente pues que no podemos usar catálogos con gran número de estrellas pues nos faltarían datos. En su lugar hemos considerado estos tres:

1. Eggen, O.J. 1961: *Space-Velocity Vectors for 3483 Stars.*
2. Eggen, O.J. 1964: *A Catalogue of High-Velocity Stars.*
3. Gliese, W. 1969: *Catalogue of Nearby Stars.*

El primer catálogo de Eggen es bastante completo, dispone de 3483 estrellas distantes a menos de 500 pc, libres de cualquier selección accidental y con velocidades bastantes afinadas. El segundo de Eggen es un catálogo esencialmente formado por estrellas de alta velocidad, constituido por 656 estrellas con velocidades espaciales respecto al sol superiores a 100 km s^{-1} pero con errores considerables en comparación con el primer catálogo. Finalmente el catálogo de Gliese esta formado por 1529 estrellas simples y sistemas múltiples, todos éllos bastante próximos al sol, entre 0 y 25 pc.

Presentados los catálogos pasemos a confeccionar las muestras atendiendo a los dos objetivos enunciados antes: primero comparar nuestros resultados con los de Glebocki y segundo estudiar el entorno solar.

Comencemos por el primer punto. Glebocki seleccionó de los dos catálogos de Eggen un conjunto de 2260 estrellas F, G, K distantes a menos de 100 pc agrupándolas en gigantes y enanas según su clase de luminosidad. Hemos reproducido la muestra de estrellas gigantes y la de enanas, muestras a las que llamamos 1 y 2, con 1059 y 1175 estrellas respectivamente.

Para interpretar el entorno solar, usamos por separado los catálogos de Gliese y primero de Eggen. En particular del catálogo de Gliese seleccionamos la muestra construida por Erickson a partir de las estrellas con datos suficientes, evitando las enanas blancas y subenanas (869 estrellas). Esta es la que llamamos muestra 3, muy local y formada esencialmente por estrellas de la secuencia principal (90%). Para discutir la variación de los momentos y otros parámetros con la distancia adoptamos además la muestra 4, formada por el primer catálogo de Eggen (3483 estrellas), muestra que comprende y completa a la anterior en el sentido de que contiene estrellas bastante alejadas (hasta 500 pc) y que la mitad de sus estrellas son gigantes.

En los cuatro casos, conocidos los momentos totales obtendremos el porcentaje de población II y los momentos parciales de segundo orden cuyas raices cuadradas son las velocidades residuales típicas de cada población.

b) *Método estadístico*

Para proceder al cálculo de los momentos centrados (4) hay que expresar la definición en forma discreta:

$$\mu_{pqr} = \frac{1}{K} \sum_K (\Pi - \Pi_0)^p (\Theta - \Theta_0)^q (Z - Z_0)^r \quad , \qquad (44)$$

donde K es el número de estrellas de la muestra, Π, Θ, Z son las componentes de la velocidad galactocéntrica V de cada estrella y Π_0, Θ_0, Z_0 son las componentes de la velocidad galactocéntrica V_0 del centroide de la muestra. Tales componentes no las conocemos por separado, pero lo que realmente nos interesa son las diferencias que aparecen en (44) y éstas son fácilmente expresables en función de las variables heliocéntricas que figuran en los catálogos. Basta tomar como origen de coordenadas en lugar del centro de la galaxia, el sol. Es evidente que la velocidad residual u de cada estrella puede expresarse también como diferencia de velocidades heliocéntricas:

$$u = V - V_0 = W - W_0$$

Teniendo en cuenta que la primera componente de la base galáctica heliocéntrica está en sentido contrario que la base cilíndrica galactocéntrica, lo que introduce el factor menos uno en (44) dando lugar a:

$$\mu_{pqr} = \frac{(-1)^p}{K} \sum_K (W_1 - W_{01})^p (W_2 - W_{02})^q \times (W_3 - W_{03})^r \quad , \qquad (45)$$

donde W_1, W_2, W_3 se conocen por los catálogos y W_{01}, W_{02}, W_{03} se calculan para cada muestra sin más que considerar la media del conjunto. Finalmente para calcular las covarianzas, según diversos autores, (Kaplan 1952; Erickson 1975; Núñez 1981), si K es grande se obtienen mediante las fórmulas aproximadas:

$$\mathrm{var}\, \mu_{ij} = \frac{1}{K} \left[\mu_{ijij} - \mu_{ij}^2\right] \quad , \qquad (46)$$

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1985RMxAA..11...23R

$$\mathrm{var}\,\mu_{ijk} = \frac{1}{K}\Big[\mu_{ijkijk} - 2(\mu_{iijk}\,\mu_{jk} + \mu_{ijjk}\,\mu_{ik} + \mu_{ijkk}\,\mu_{ij}) - \mu_{ijk}^2 + (\mu_{ii}\,\mu_{jk}^2 + \mu_{jj}\,\mu_{ik}^2 + \mu_{kk}\,\mu_{ij}^2) + 6\,\mu_{ij}\,\mu_{ik}\,\mu_{jk} \quad , \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\,\mu_{ijkl} = \frac{1}{K}\Big[&\mu_{ijklijkl} - \mu_{ijkl}^2 - 2(\mu_{iijkl}\,\mu_{jkl} + \mu_{ijjkl}\,\mu_{ikl} + \mu_{ijkkl}\,\mu_{ijl} + \mu_{ijkll}\,\mu_{ijk}) + \\ &+ (\mu_{ii}\,\mu_{jkl}^2 + \mu_{jj}\,\mu_{ikl}^2 + \mu_{kk}\,\mu_{ijl}^2 + \mu_{ll}\,\mu_{ijk}^2) + \\ &+ (\mu_{ij}\,\mu_{ijk}\,\mu_{kll} + \mu_{ij}\,\mu_{ijl}\,\mu_{kkl} + \mu_{ik}\,\mu_{ikl}\,\mu_{jjl} + \\ &+ \mu_{ik}\,\mu_{ijk}\,\mu_{jll} + \mu_{il}\,\mu_{ijl}\,\mu_{jkk} + \mu_{il}\,\mu_{ikl}\,\mu_{jjk} + \\ &+ \mu_{jk}\,\mu_{ijk}\,\mu_{ill} + \mu_{jk}\,\mu_{jkl}\,\mu_{iil} + \mu_{jl}\,\mu_{ijl}\,\mu_{ikk} + \\ &+ \mu_{jl}\,\mu_{jkl}\,\mu_{iik} + \mu_{kl}\,\mu_{ikl}\,\mu_{ijj} + \mu_{kl}\,\mu_{jkl}\,\mu_{iij})\Big] \quad . \end{aligned}\tag{48}$$

c) *Resultados obtenidos*

Las velocidades heliocéntricas de los centroides y los momentos centrados de las muestras mencionadas, aparecen en las Tablas 1 y 2.

Para cada muestra deberían ser distintos de cero los momentos que aparecen en la lista (5), mientras que todos los restantes deberían presentar errores iguales o superiores a sus valores centrales. Esto es lo que sucedería si se verificasen cumplidamente todas las hipótesis admitidas con respecto al potencial galáctico; como que éstas sólo son ciertas en primera aproximación, no puede ser tan preciso el comportamiento a esperar por parte de los distintos momentos. Basta observar las Tablas 1 y 2 para advertir que, en cada caso, los momentos de cierto orden que tienen mayores los márgenes de error se corresponden con los que deberían ser nulos, mientras que los momentos con menores errores son los que hemos supuesto distintos de cero en (5); lo cual justifica las hipótesis aceptadas. A excepción hecha de los momentos $\mu_{\varpi\theta}$ y $\mu_{\varpi z}$, que hemos despreciado, como hacen la mayoría de los autores, para simplificar los desarrollos. El primero de éllos $\mu_{\varpi\theta}$ de carácter local, producido por la desviación del vértex y discutido por varios autores (Yuan 1971; Mayor 1972) y el segundo $\mu_{\varpi z}$, que se pone de manifiesto al alejarnos suficientemente del sol (Núñez y Torra 1982).

Los resultados de la Tabla 1 los usaremos para discutir los valores de Glebocki (1967). Por figurar ya en la literatura, para los momentos centrados de la muestra 3 damos (Tabla 2) los publicados por Erickson (1975), que coinciden perfectamente con los obtenidos usando (44), (45), (46), (47) y (48), demostrando con éllo la bondad del método de cálculo utilizado.

TABLA 1

MOMENTOS CENTRADOS DE LA DISTRIBUCION DE VELOCIDADES Y SUS ERRORES ESTANDAR
(W_{0i} i = 1,2,3 son las velocidades heliocéntricas del centroide)

	Muestra 1		Muestra 2	
W_{01}	−11.2 ±	1.1	−14.3 ±	1.7
W_{02}	−19.4	0.9	−36.6	1.6
W_{03}	−7.5	0.6	−8.3	0.8
$\mu_{\varpi\varpi}$	1 370 ±	120	3 500 ±	300
$\mu_{\varpi\theta}$	270	140	150	250
$\mu_{\varpi z}$	0	40	−170	120
$\mu_{\theta\theta}$	930	205	3 050	350
$\mu_{\theta z}$	30	40	50	110
μ_{zz}	370	45	840	140
$\mu_{\varpi\varpi\varpi}$	−32 300 ±	28 500	114 000 ±	78 000
$\mu_{\varpi\varpi\theta}$	−63 700	40 400	−318 000	62 000
$\mu_{\varpi\varpi z}$	1 200	6 600	−9 000	29 000
$\mu_{\varpi\theta\theta}$	−66 000	59 000	81 000	74 000
$\mu_{\varpi\theta z}$	46 000	8 800	16 000	22 000
$\mu_{\varpi zz}$	−1 000	2 600	−45 000	35 000
$\mu_{\theta\theta\theta}$	−125 600	84 800	−525 000	109 000
$\mu_{\theta\theta z}$	7 700	12 200	−13 000	33 000
$\mu_{\theta zz}$	−12 500	4 000	−70 000	19 000
μ_{zzz}	−9 400	7 600	46 000	51 000
$\mu_{\varpi\varpi\varpi\varpi}$	17 600 000 ±	8 900 000	122 300 000 ±	27 300 000
$\mu_{\varpi\varpi\varpi\theta}$	13 400 000	12 700 000	−25 000 000	18 200 000
$\mu_{\varpi\varpi\varpi z}$	−1 660 000	1 900 000	−5 800 000	8 400 000
$\mu_{\varpi\varpi\theta\theta}$	20 700 000	18 300 000	75 800 000	20 600 000
$\mu_{\varpi\varpi\theta z}$	−2 100 000	2 700 000	6 100 000	5 700 000
$\mu_{\varpi\varpi zz}$	1 430 000	480 000	17 000 000	9 200 000
$\mu_{\varpi\theta\theta\theta}$	27 600 000	26 400 000	−29 200 000	28 400 000
$\mu_{\varpi\theta\theta z}$	−3 300 000	3 800 000	−4 700 000	5 700 000
$\mu_{\varpi\theta zz}$	730 000	590 000	5 900 000	4 800 000
$\mu_{\varpi zzz}$	200 000	290 000	−12 200 000	13 400 000
$\mu_{\theta\theta\theta\theta}$	44 500 000	38 100 000	153 700 000	43 200 000
$\mu_{\theta\theta\theta z}$	−4 900 000	5 500 000	5 800 000	9 000 000
$\mu_{\theta\theta zz}$	1 860 000	850 000	14 400 000	3 700 000
$\mu_{\theta zzz}$	675 000	665 000	−5 600 000	6 500 000
μ_{zzzz}	2 430 000	1 500 000	24 900 000	20 100 000

a. Explicación de las muestras en el texto.
b. Unidades en $km^n\ s^{-n}$ para el orden n.

V. APLICACION DEL METODO DE SUPERPOSICION

En este apartado vamos a discutir los valores de los parámetros introducidos anteriormente para caracterizar los diversos grupos de estrellas situados en el entorno solar. Al hacerlo, para las distintas muestras selecciona-

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1985RMxAA..11...23R

TABLA 2

MOMENTOS CENTRADOS DE LA DISTRIBUCION DE VELOCIDADES Y SUS ERRORES ESTANDAR
($W_{0\,i}$ i = 1,2,3 son las velocidades heliocéntricas del centroide)

	Muestra 3		Muestra 4	
W_{0_1}	−10.3 ±	1.4	−11.9 ±	0.6
W_{0_2}	−20.5	0.9	−19.4	0.5
W_{0_3}	−7.6	0.7	−7.3	0.3
$\mu_{\varpi\varpi}$	1 300 ±	80	1 340 ±	60
$\mu_{\varpi\theta}$	110	40	100	40
$\mu_{\varpi z}$	−20	30	−60	20
$\mu_{\theta\theta}$	600	40	730	50
$\mu_{\theta z}$	20	20	35	15
μ_{zz}	350	25	310	15
$\mu_{\varpi\varpi\varpi}$	−5 000 ±	6 100	14 000 ±	12 600
$\mu_{\varpi\varpi\theta}$	−13 400	3 100	−35 300	8 500
$\mu_{\varpi\varpi z}$	2 000	2 600	−2 400	2 500
$\mu_{\varpi\theta\theta}$	−200	2 700	6 000	6 700
$\mu_{\varpi\theta z}$	−800	1 400	2 400	1 800
$\mu_{\varpi zz}$	−1 100	1 400	700	1 100
$\mu_{\theta\theta\theta}$	−13 700	2 900	−53 400	13 100
$\mu_{\theta\theta z}$	−100	1 400	−1 400	1 800
$\mu_{\theta zz}$	−2 100	900	−6 300	850
μ_{zzz}	600	1 300	−3 100	1 500
$\mu_{\varpi\varpi\varpi\varpi}$	6 560 000 ±	940 000	15 400 000 ±	3 600 000
$\mu_{\varpi\varpi\varpi\theta}$	430 000	360 000	−3 400 000	2 400 000
$\mu_{\varpi\varpi\varpi z}$	−290 000	330 000	−1 260 000	600 000
$\mu_{\varpi\varpi\theta\theta}$	1 430 000	270 000	5 400 000	1 700 000
$\mu_{\varpi\varpi\theta z}$	−8 000	130 000	550 000	400 000
$\mu_{\varpi\varpi zz}$	890 000	150 000	1 140 000	190 000
$\mu_{\varpi\theta\theta\theta}$	20 000	270 000	−1 700 000	1 500 000
$\mu_{\varpi\theta\theta z}$	20 000	120 000	−300 000	300 000
$\mu_{\varpi\theta zz}$	−13 000	70 000	−170 000	120 000
$\mu_{\varpi zzz}$	−93 000	95 000	−340 000	130 000
$\mu_{\theta\theta\theta\theta}$	1 680 000	320 000	10 600 000	4 000 000
$\mu_{\theta\theta\theta z}$	71 000	140 000	−70 000	470 000
$\mu_{\theta\theta zz}$	370 000	80 000	760 000	114 000
$\mu_{\theta zzz}$	48 000	65 000	145 000	75 000
μ_{zzzz}	610 000	110 000	880 000	250 000

a. Explicación de las muestras en el texto.
b. Unidades en $km^n\, s^{-n}$ para el orden n.

das obtendremos algunos resultados que no contradicen los alcanzados por varios autores usando otros métodos, obteniendo además nuevas conclusiones no establecidas anteriormente. Tales consideraciones nos permiten confiar tanto en la bondad de la teoría expuesta como en los nuevos resultados logrados en este trabajo.

Empezamos primero comparando las muestras 1 y 2 con los resultados debidos a Glebocki. En ambas muestras consideramos en primer lugar la q libre, trabajando dentro de las cotas de error de los momentos. Con ello obtenemos los márgenes de variabilidad de los parámetros más representativos, resultado mucho más general que el de Glebocki. Finalmente fijamos la misma q que dicho autor para comparar mejor los resultados.

De las muestras 3 y 4 deducimos la variabilidad de ciertos parámetros relativos a las poblaciones estelares. En particular el porcentaje de población II, podemos contrastarlo con los publicados por diversos autores, según el tipo espectral. Así disponemos de los valores de Oort (1926) para estrellas distantes a menos de 20 pc, de los deducidos por Kuiper (1948) y de los debidos a Einasto (1954) para estrellas de la secuencia principal.

En general, para todas las muestras, los momentos de segundo orden son los mejor conocidos y los de tercer y cuarto orden son los que están peor determinados. Tomaremos por tanto, los valores centrales de los momentos centrados de segundo orden y elegiremos de entre los de tercer y cuarto orden los mejor determinados, para a partir de éstos y las ligaduras de que disponemos, obtener los demás.

a) *Estudio de las muestras 1 y 2*

Dado que la muestra 1 (Tabla 1) presenta errores considerables para los momentos, no nos queda otra solución que actuar un poco a tanteo, tabulando los posibles valores. En las restantes muestras, como en general sus momentos respectivos estan mejor determinados, realizaremos un estudio más preciso y exhaustivo.

Siguiendo el esquema de trabajo expuesto anteriormente, adoptamos los momentos de segundo orden iguales a sus momentos centrales y de entre lo de tercer y cuarto orden consideramos los mejor conocidos:

$$\mu_{\varpi\varpi} = 1\,400 \text{ km}^2\text{ s}^{-2} \qquad \mu_{\theta\theta} = 930 \text{ km}^2\text{ s}^{-2}$$

$$\mu_{zz} = 370 \text{ km}^2\text{ s}^{-2} \qquad \mu_{\theta zz} = -\,13\,000 \text{ km}^3\text{ s}^{-3}$$

$$\mu_{\varpi\varpi zz} = 1\,400000 \text{ km}^4\text{ s}^{-4} \quad .$$

Según (29), (40) y (42) obtenemos ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_6, $\bar{\rho}_5$, Y y se comprueba que los momentos $\mu_{\varpi\varpi\varpi\varpi}$, $\mu_{\varpi\varpi\theta\theta}$, $\mu_{\theta\theta zz}$, μ_{zzzz} y $\mu_{\varpi\varpi\theta}$ están dentro de los márgenes de error previstos en la Tabla 1.

Dejando q libre en las fórmulas de la superposición, según (36) para que q sea real, tenemos una acotación de ρ_5, que nos permite acotar el momento $\mu_{\theta\theta\theta\theta}$ (32). A continuación construimos la Tabla 3, para distintos valores de n″, donde sólo incluimos los valores que dan $\mu_{\theta\theta\theta\theta}$ dentro de los límites permitidos y el $\mu_{\theta\theta\theta}$ dentro de los márgenes de error de la Tabla 1 y las velocidades residuales típicas no imaginarias.

Hecho este análisis, la solución obtenida por Glebocki, q = 9.64 aparece como una de las posibles. Al utilizar los momentos de tercer y cuarto orden, nuestro estudio resulta ser mucho más general que el de Glebocki, comprobándose la bondad de la descomposición dada por este autor como suma de dos distribuciones de Schwarzschild (Iwanowska 1966). Según se desprende de la Tabla 3 para esta muestra 1, el porcentaje de pobla-

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1985RMxAA..11...23R

TABLA 3

POSIBLES VALORES DE DIVERSAS VARIABLES PARA LA MUESTRA 1, SEGUN n''

n''	q	D	σ'_ω	σ''_ω	σ'_θ	σ''_θ	σ'_z	σ''_z
0.12	7.33	73	28	76	3	55	13	43
0.11	8.09	76	29	77	7	54	13	44
0.10	9.00	79	29	79	10	52	14	45
0.09	10.11	83	30	81	12	50	14	46
0.08	11.50	88	30	83	14	46	14	47
0.07	13.29	93	31	85	16	42	15	49
0.06	15.67	100	31	88	18	34	15	50
0.05	19.00	109	32	92	19	14	16	52

Velocidades en km s^{-1}.

ción II está comprendido entre un cinco y un doce por ciento, mientras que la diferencia de velocidades de los centroides D, se mantiene entre 73 y 109 km s^{-1}. Para poder comparar mejor las velocidades residuales típicas, procedemos a fijar $q = 9.64$ de Glebocki. Según (38) y (39):

$$n' = 0.91 \qquad n'' = 0.09 \qquad D = 82 \text{ km s}^{-1}$$

Mediante las relaciones (36), (37) y (43), se comprueba que los momentos $\mu_{\theta\theta\theta\theta}$ y $\mu_{\theta\theta\theta}$ están dentro de los márgenes admitidos en la Tabla 1. Finalmente, nos resta determinar las velocidades residuales típicas, raices cuadradas de los momentos parciales de segundo orden, extrayendo las raices en (41), deducimos los valores que figuran en la Tabla 4, en la cual también hemos incluido los publicados por Glebocki (1967). Es notable la concordancia en ω y z para ambas poblaciones. En la segunda componente θ difieren algo más sin duda debido a los términos $n''^2 D^2$ y $n'^2 D^2$ que aparecen en las fórmulas (41). La diferencia obtenida por Glebocki resulta algo pequeña y hace que σ'_θ y σ''_θ le salgan algo mayores.

TABLA 4

VELOCIDADES RESIDUALES TIPICAS DE LAS POBLACIONES I Y II PARA LA MUESTRA 1, EN EL CASO q = 9.64

modelo	D	σ'_ω	σ''_ω	σ'_θ	σ''_θ	σ'_z	σ''_z
superposición	82	30	80	12	51	14	45
Glebocki	50	29	80	18	58	15	45

Como la muestra 2, tiene sus momentos mucho mejor determinados (Tabla 1) el proceso seguido es algo distinto al anterior. Empezamos como antes adoptando iguales a los valores centrales, los momentos de segundo orden y los mejores de tercero y cuarto:

$$\mu_{\omega\omega} = 3500 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \quad \mu_{\theta\theta} = 3100 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$\mu_{zz} = 840 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$\mu_{\omega\omega\theta} = -\,320000 \text{ km}^3 \text{ s}^{-3} \quad \mu_{\theta zz} = 530000 \text{ km}^3 \text{ s}^{-3}$$

A partir de las fórmulas de la superposición (39), (41) y (43) deducimos estas dos superficies en q y D:

$$\left.\begin{aligned} \mu'_{\theta\theta} &= \mu_{\theta\theta} + \frac{\mu_{\theta\theta\theta}}{3}\,\frac{q+1}{q}\,\frac{1}{D} - \frac{1}{3}\,\frac{2q+1}{(q+1)^2}\,D^2 \\ \mu''_{\theta\theta} &= \mu_{\theta\theta} - \frac{\mu_{\theta\theta\theta}}{3}\,(q+1)\,\frac{1}{D} - \frac{1}{3}\,\frac{q\,(q+1)}{(q+1)^2}\,D^2 \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

y consideramos entonces la zona en que ambas superficies son positivas o iguales a cero. Dejando q libre,a partir de las fórmulas (28), (39), (42) y de las cotas de $\mu_{\theta\theta\theta\theta}$ de la Tabla 1, deducimos una zona cuya intersección con las $\mu'_{\theta\theta} \geqslant 0$ y $\mu''_{\theta\theta} \geqslant 0$ determinadas antes, nos permite acotar la q y por tanto, según (38):

$$0.05 \leqslant n'' \leqslant 0.11$$

Construimos entonces la Tabla 5, donde incluimos los valores de n'' comprendidos entre éstos límites, que dan además los momentos $\mu_{\omega\omega\omega\omega}$, $\mu_{\omega\omega\theta\theta}$, $\mu_{\theta\theta\theta\theta}$, $\mu_{\omega\omega zz}$, $\mu_{\theta\theta zz}$, μ_{zzzz}, $\mu_{\theta zz}$ dentro de las cotas de error y las velocidades residuales típicas reales.

Según Glebocki (1967), para esta muestra 2, es la $q = 4.86$, valor a todas luces pequeño comparado con los obtenidos, y ya se intuye que le corresponderán velocidades residuales típicas imaginarias (Tabla 5). No obstante calculemos dichos semiejes para esta $q = 4.86$. Según (38) y (39):

$$n' = 0.83 \qquad n'' = 0.17 \qquad D = 138 \text{ km s}^{-1} \quad ,$$

TABLA 5

POSIBLES VALORES DE DIVERSAS VARIABLES PARA LA MUESTRA 2 SEGUN n''

n''	q	D	σ'_ω	σ''_ω	σ'_θ	σ''_θ	σ'_z	σ''_z
0.10	9.00	173	38	148	9	58	19	71
0.09	10.11	181	40	152	13	54	20	73
0.08	11.51	191	41	156	17	49	21	75
0.07	13.29	203	43	161	18	41	21	77
0.06	15.67	218	44	167	20	24	22	80

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1985RMxAA..11...23R

con la salvedad de que al calcular los momentos $\mu_{\theta\theta\theta\theta}$, $\mu_{\varpi\varpi\theta\theta}$ y $\mu_{\theta\theta zz}$ éstos quedan fuera de los márgenes de error de la Tabla 1. Finalmente en la Tabla 6 presentamos los valores de las velocidades residuales típicas obtenidas mediante (41), junto con las publicadas por Glebocki (1967). Entre los valores de dicha tabla observamos una menor concordancia que entre los de la Tabla 4, construida para estrellas gigantes. En particular la discrepancia en θ se puede razonar como hemos hecho antes al ser la D de Glebocki demasiado pequeña, pero este razonamiento no es válido para justificar las diferencias en los otros semiejes. En consecuencia hay que recordar que la q = 4.86 no es una de las obtenidas en la Tabla 5, lo que sugiere recurrir a la superposición de dos modelos más generales que los del tipo (6). Si se adopta una superposición de dos funciones de distribución más generales, como son las del tipo (2), se demuestra que en las ecuaciones (18), (19) y (20) aparecen unos nuevos términos que justifican estas discordancias que ahora observamos. En dichos términos aparecen los momentos parciales de orden tres, los cuales no afectan prácticamente el resultado de la muestra 1 de estrellas gigantes, pero sí lo hacen en el caso de la muestra 2, dado que sus momentos son mucho mayores que los de las estrellas gigantes (Tabla 1).

TABLA 6

VELOCIDADES RESIDUALES TIPICAS DE LAS POBLACIONES I Y II PARA LA MUESTRA 2, EN EL CASO q = 4.86

modelo	D	σ'_ϖ	σ''_ϖ	σ'_θ	σ''_θ	σ'_z	σ''_z
superposición	138	27	131	--	56	14	63
Glebocki	100	37	116	23	86	15	59

Velocidades en km s^{-1}.

Concluimos pues, que ambas muestras 1 y 2 pueden descomponer en superposición de dos funciones de Schwarzschild, si bién la descomposición propuesta por Glebocki sólo es posible para las estrellas gigantes. La muestra 2 sólo puede descomponer según la q que considera este autor si admitimos una superposición de dos funciones de distribución más generales.

Finalmente, antes de pasar a considerar otras muestras, evaluamos para ambos el porcentaje de población II previsto usando los números de Oort (1926) y de Kuiper (1948). No son apropiados los resultados obtenidos por Einasto, pues dicho autor sólo consideró momentos de orden dos, que ya hemos visto que son insuficientes. Aplicando los datos de estos autores a las muestras 1 y 2, los porcentajes obtenidos están dentro de los márgenes calculados por nosotros, pero discrepan totalmente de los propuestos por Glebocki.

b) *Estudio de las muestras 3 y 4*

Como las muestras 3 y 4 tienen sus momentos bastantes bien determinados, el proceso seguido será análogo al utilizado para estudiar la muestra 2.

Empezamos primero por considerar la muestra 3 de estrellas de Erickson. Adoptamos los momentos mejor conocidos iguales a los valores centrales:

$$\mu_{\varpi\varpi} = 1300 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \quad \mu_{\theta\theta} = 600 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$\mu_{zz} = 350 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \quad \mu_{\theta\theta\theta} = -\ 14000 \text{ km}^3 \text{ s}^{-3}$$

Consideramos entonces las ligaduras (40), las cotas debidas a los restantes momentos (Tabla 2) y las superficies (49) introducidas antes. Todo lo cual permite acotar la variación de q y por lo tanto deducir:

$$0.13 \leqslant n'' \leqslant 0.50 \tag{50}$$

manteniendose todos los momentos dentro de sus márgenes salvo el $\mu_{\theta zz}$, que se escapa un poco, aunque lo consideramos aceptable dado que este momento es el peor determinado, con diferencia de todos los de la muestra. También podemos acotar la diferencia de velocidades de los centroides D:

$$22 \leqslant D \leqslant 34 \text{ km s}^{-1}$$

y finalmente aplicando (41) y extrayendo las respectivas raices cuadradas deducimos entre qué márgenes se mueven las velocidades residuales típicas de las poblaciones I y II de la muestra 3.

No se dispone de valores para comparar estos semiejes, pero son del orden de magnitud de los obtenidos por varios autores para estrellas que se consideran representativas de cada tipo de población (Delhaye 1965; Chiu 1980; Karimova y Pavloskaya 1976; Oort 1965).

$$\left.\begin{array}{lll} 20 \leqslant \sigma'_\varpi \leqslant 31 & 47 \leqslant \sigma''_\varpi \leqslant 61 & \text{km s}^{-1} \\ 8 \leqslant \sigma'_\theta \leqslant 19 & 30 \leqslant \sigma''_\theta \leqslant 47 & \text{km s}^{-1} \\ 4 \leqslant \sigma'_z \leqslant 15 & 26 \leqslant \theta''_z \leqslant 35 & \text{km s}^{-1} \end{array}\right\} . \tag{51}$$

Lo que sí es comparable para esta muestra, es el porcentaje de población II obtenido según Oort (1926) y Einasto (1954) que en ambos casos es del 23%, dentro de los márgenes previstos en (50).

A continuación vamos a estudiar el grupo constituido por todas las estrellas del primer catálogo de Eggen (1961), al cual hemos llamado muestra 4. El proceso es análogo al anterior, tomamos los valores centrales para los momentos mejor determinados:

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1985RMxAA..11...23R

$$\mu_{\omega\omega} = 1300 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \quad \mu_{\theta\theta} = 730 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$\mu_{zz} = 310 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \quad \mu_{\theta zz} = -\ 6300 \text{ km}^3 \text{ s}^{-3}$$

$$\mu_{\omega\omega zz} = 1\ 100000 \text{ km}^4 \text{ s}^{-4} \quad \mu_{\theta\theta zz} = 760000 \text{ km}^4 \text{ s}^{-4}$$

Considerando las relaciones (40) y las acotaciones de los restantes momentos (Tabla 2) así como las superficies (49), conseguimos acotar q y por tanto obtenemos:

$$0.08 \leqslant n'' \leqslant 0.17 \tag{52}$$

y la diferencia de velocidades de los centroides de las poblaciones I y II está comprendida entre:

$$45 \leqslant D \leqslant 68 \quad \text{km s}^{-1}$$

y los límites de variación de las velocidades residuales típicas son:

$$\left.\begin{array}{lll} 21 \leqslant \sigma'_\omega \leqslant 26 & 79 \leqslant \sigma''_\omega \leqslant 91 & \text{km s}^{-1} \\ 0 \leqslant \sigma'_\theta \leqslant 15 & 46 \leqslant \sigma''_\theta \leqslant 51 & \text{km s}^{-1} \\ 13 \leqslant \sigma'_z \leqslant 14 & 33 \leqslant \sigma''_z \leqslant 38 & \text{km s}^{-1} \end{array}\right\} \tag{53}$$

Semiejes que si los comparamos con los (51) de la muestra 3, se observa que las σ' correspondientes a la población I son aproximadamente del mismo orden, siendo en cambio mayores las σ'' para la población del tipo II. Lo que tiene una sencilla explicación, pues la muestra 4 contiene estrellas mucho más alejadas que las de la muestra 3 y, por tanto, además de contener estrellas de la población II del disco, incluye otras de la población II intermedia, cuyas velocidades suelen ser mayores que las de las estrellas de la población II del disco.

Al igual que en las otras muestras, veamos cuales son los porcentajes de población II previstos para esta muestra según los resultados de Oort y Kuiper. No podemos recurrir a los números de Einasto, pues este autor sólo dá información para estrellas de la secuencia principal, y la mitad de la muestra 4 esta constituida por estrellas de clases de luminosidad II, III y IV. Tampoco son muy indicados los porcentajes de Oort (1926, p. 55) y de Kuiper (1948, p. 194), pues ambos corresponden a estrellas mucho más cercanas que las de la muestra 4. No obstante, al no disponer de otros resultados, vamos a utilizarlos aunque sólo sea a título meramente indicativo. Así obtenemos, usando dichos números, que el procentaje previsible de población II es del orden del seis y del siete por ciento respectivamente, valores muy próximos a nuestra cota inferior (52).

Resumiendo, de las muestras 3 y 4 no podemos determinar de forma exacta, el porcentaje de estrellas de alta velocidad y las velocidades residuales típicas de ambos tipos de población, para el entorno solar. Sólo podemos dar sus intervalos de variabilidad, dado que conocemos los momentos con notables márgenes de.error. Estas cotas son bastante amplias para los porcentajes de poblaciones I y II, pero más estrictas para los valores de los respectivos semiejes de los elipsoides de velocidades; no podemos pues cuantificar la variación del porcentaje de estrellas de alta velocidad (sólo afirmar su sentido), mientras que sí nos es posible dar resultados para los semiejes. De la muestra 3 deducimos que en el entorno solar, hasta 20 pc, el porcentaje de población II corresponde a la población del disco, con velocidades residuales típicas del orden de (54.0±7.0, 38.5±8.5, 30.5±4.5) km s^{-1}. Este porcertaje de población II disminuye al considerar la muestra 4, situada entre 0 y 500 pc, con estrellas pertenecientes a la población II intermedia, aunque sin llegar al halo, con velocidades residuales típicas del orden de (85.0±6.0, 48.5±2.5, 35.5±2.5) km s^{-1}. En ambos casos las velocidades residuales típicas correspondientes a la población I son del mismo orden, pudiendose adoptar como valores medios de las mismas (24.0±4.0, 10.5±6.5, 11.5±3.0) km s^{-1}.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos llegado a los siguientes resultados generales:

1) Hemos construido un modelo tridimensional con momentos de orden superior a dos.

2) Se han calculado los momentos hasta cuarto orden para cuatro muestras distintas extraidas de los catálogos de Eggen y de Gliese, comprobándose que los momentos no nulos son los ya obtenidos en nuestro desarrollo teórico.

3) De las fórmulas de superposición obtenidas se deduce también que la muestra total tiene sus momentos impares no nulos, aunque lo sean todos los relativos a ambos subsistemas.

4) Así mismo hemos desarrollado un sencillo método para calcular los porcentajes de población I y II que, a partir de los valores de sus momentos hasta el cuarto orden, pueden encontrarse en una muestra cualquiera sin necesidad de clasificar una por una las estrellas que constituyen dicha muestra, evitando usar criterios nada claros para las estrellas no extremas, que son siempre las más abundantes. También deducimos las fórmulas necesarias para obtener las distintas velocidades residuales típicas de cada tipo de población y la diferencia entre las velocidades de los centroides de ambos subsistemas.

5) A partir de las muestras consideradas se deduce la variación de los porcentajes de las poblaciones con la distancia al sol, asi como las velocidades residuales típicas de dichas poblaciones. Debido a los márgenes de error con que conocemos los momentos, no podemos cuantifi-

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1985RMxAA..11...23R

car la variación del porcentaje de estrellas de alta velocidad pero sí afirmar que disminuye al alejarnos del sol, resultado que podría estar enmascarado por el hecho de la mayor absorción interestelar a bajas latitudes galácticas. Sólo damos resultados numéricos concretos en cuanto se refiere a las velocidades residuales típicas de las poblaciones estelares.

BIBLIOGRAFIA

Chandrasekhar, S. 1942, *Principles of Stellar Dynamics* (Chicago: The University of Chicago Press).
Chiu, L.-T.G. 1980, *Ap. J. Suppl.*, 44, 71.
Delhaye, J. 1965, en *Galactic Structure*, ed. A. Blaauw and M. Schmidt (Chicago: The University of Chicago Press), p. 61.
Eggen, O.J. 1961, *R. Obs. Bull.* No. 51.
Eggen, O.J. 1964, *R. Obs. Bull.* No. 84.
Einasto, J. 1954, *Tartu Obs. Publ.*, 32, No. 6.
Erickson, R.R. 1975, *Ap. J.*, 195, 343.
Glebocki, R. 1967, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, 4, 117.
Gliese, W. 1969, *Catalogue of Nearby Stars* Astronomisches Rechen-Institut. Heidelberg Veroff. No. 22.
Iwanowska, W. 1966, en *Vistas in Astronomy*, 7. 133.
Iwanowska, W. 1976, en *Stars and Galaxies from Observational Points of View* ed. E.K. Kharadze, p. 357.
Iwanowska, W. 1979, *Bull. Inform. CDS.* No. 16.
Kaplan, E.L. 1952, *Biometrika*, 39, 319.
Karimova, D.K. y Pavlovskaya, E.D. 1976, en *Stars and Galaxies from Observational Points of View*, ed. E.K. Kharadze, p. 363.
Kuiper, G.P. 1948, *A.J.*, 53, 194.
Mayor, M. 1972, *Astr. and Ap.*, 18, 97.
Núñez, J. 1981, *Cinemática galáctica local y constante de precesión*, Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.
Núñez, J. y Torra, J. 1982, *Astr. and Ap.*, 110, 95.
Oort, J.H. 1926, *Kapteyn Astron. Lab. Groningen Publ.*, 40.
Oort, J.H. 1965, en *Galactic Structure*, eds. A. Blaauw y M. Schmidt (Chicago: The University of Chicago Press), p. 455.
Orús, J.J. de, 1977, *Apuntes de dinámica galáctica*, Cátedra de Astronomía, Universidad de Barcelona.
Yuan, C. 1971, *A.J.*, 76, 664.

Rosa Ma. Ros: Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos, Universidad de Barcelona, Diagonal 645, 08028 Barcelona, España.

© Universidad Nacional Autónoma de México • Provided by the NASA Astrophysics Data System